

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jacques BROS

PROPRIETES ALGEBRIQUES ET ANALYTIQUES
DE LA FONCTION DE n POINTS EN THEORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

Soutenue le 26 juin 1970, devant la Commission d'Examen

MM. P. LELONG Président

F. LURÇAT

V. GLASER Examineurs

R. STORA

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jacques BROS

PROPRIETES ALGEBRIQUES ET ANALYTIQUES
DE LA FONCTION DE n POINTS EN THEORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

Soutenue le 26 juin 1970, devant la Commission d'Examen

MM. P. LELONG

Président

F. LURÇAT

V. GLASER

R. STORA

Examineurs

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen

M. ZAMANSKY

MM. GRASSE T Evolution des êtres organisés
PREVOST T Chimie organique
WYART T Minéralogie & cristallographie
TEISSIER T Zoologie
AUGER T Physique quantique & relativité
MONNIER T Physiologie générale
PIVETEAU T Paléontologie
ROCARD T Physique E.N.S.
CARTAN T Mathématiques E.N.S.
LAFFITTE T Chimie générale
N... T Géométrie supérieure
COULOMB T Physique du globe
CRETIEN T Chimie minérale
BOCQUET T Zoologie
KASTLER T Chimie E.N.S.
EPHRAÏM T Génétique
GAUTHIERET T Biologie végétale CPEM
LUCAS R. T Recherches physiques
THOMAS A. T Biologie
MORAND T Physique enseignement
SOLEILLET T Physique CPEM
FORTIER T Mécanique expérimentale des fluides
DRACH T Biologie maritime
QUENEY T Météorologie & dynamique de l'atmosphère
GALLIEN T Embryologie
CAUCHOIS T Chimie Physique
Mlle THELLIER T Physique du Globe
MM. PONCIN T Mécanique générale
DUBREIL T Arithmétique & Théorie des nombres
GAGNIARD T Géophysique appliquée
CHAMPETIER T Chimie macromoléculaire
CUVILLIER T Micropaléontologie
TRILLAT T Microscopie & diffraction électronique
WIEMANN T Chimie organique & structurale
YASSY T Physique de l'atmosphère
DESTOUCHES T Théorie physique
AMIEL T Chimie générale
MATHIEU J.P. T Physique optique
COUTEAUX T Cytologie
CHOUQUET T Chimie des fonctions & topologie
FELDMANN T Biologie végétale marine
JOST T Physiologie comparée
FORTET T Calcul des probabilités & physique math.
SCHWARTZ T Calcul différentiel & intégral
CHOUARD T Physiologie végétale
MALAVARD T Aviation (technique aéronautique)
BENLOT T Analyse supérieure
EICHORN T Botanique
BENARD T Chimie appliquée
DUGUE T Statistique mathématique
SOULAIRAC T Psychophysique
ULRICH T Physiologie végétale appliquée
KIRRMANN T Théories chimiques
CHADEFAUD T Botanique
Mlle LE BRETON T Physiologie de la nutrition
MM. LELONG T Application de l'analyse à la géométrie
DEVILLERS T Anatomie comparée
EHRESMANN T Topologie algébrique
FRANÇON T Physique SPCN
CLANGEAUD T Géographie physique, géologie dynamique
GODEMENT T Mathématiques MGP
ROCH T Technique mathématiques de la physique
SCHATZMANN T Géologie
TERMIER T Astronomie
ZAMANSKY T Géologie générale
LENNUIER T Mathématiques générales
ROUTHIER T Physique M.G.P.
Mme TONNELAT T Géologie appliquée
MM. DIXMIER T Physique théorique
SOUCHAY T Mathématiques M.P.C.
AIGRAIN T Chimie générale
BRUSSET T Electrotechnique
LEVY T Chimie systématique
Mme CHAIX T Physique théorique des hautes énergies
Mme HUREL PY T Chimie biologique
MM. PANNETIER T Biologie végétale CPEM
NORMANT T Chimie générale I
YVON T Synthèse organique
COTTE T Théories physiques
DUBOIS J.E. T Physique électrique
LAMOTTE T Chimie organique physique
T Zoologie E.N.S.

MM. OLMER T Energétique générale
GAUTHIER T Mécanique appliquée
BARCHIEWITZ T Chimie physique
BROSSEL T Physique atomique
BUSER T Physiologie comparée
CAMUS T Physiologie végétale
CURIEN T Minéralogie & cristallographie
POSSOMPES T Zoologie
PULLMANN T Chimie quantique
TEILLAC T Phys. nucléaire & radioactivité
VILLE T Econométrie
FREYMAN T Recherches physiques
ROLLET T Chimie minérale
Mlle JOSIEN T Chimie SPCN
MM. CHEVALLEY T Géométrie alg. & théo. des groupes
GERMAIN T Mécan. Théo. des fluides
LUCAS G. T Géologie
ALLARD T Chimie physique
BERTHELOT T Physique des particules fonda.
BRICARD T Météorologie
Mme ALBE-FESSARD T Psycho-physiologie
MM. JULIA T Etude des molécules nat. com.
MAGAT T Physico-chimie des rayonnements
MONOD T Chimie du métabolisme
BRUN T Mécanique des fluides I
Mme DUBREIL T Mathématiques (Agrégation)
Mlle LELONG T Mathématiques II E.N.S.
MM. BELLAIR T Géologie S.P.C.N.
BOUSSIÈRES T Radiochimie
Mme COUTURE T Thermodynamique & mécan.
FRANC T Biologie animale CPEM.
SCHNELL T Botanique tropicale
STOLKOWSKI T Physiologie générale
ACHER T Chimie biologique
BAUDOUIN T Biologie animale CPEM
BEAUMONT T Biologie animale SPCN
BLAMONT T Géophysique ionosphère
BOUREAU T Botanique
CURIE D. T Physique MGP
DURAND DELGA T Géologie
HELLER T Physiologie végétale
TORTRAT T Calcul des probabilités
CAILLEUX T Géologie SPCN
MAGNAN T Physique électrique
DAUDEL T Mécanique ondulatoire
Mme CHOQUET T Mécanique analytique et
BRUHAT T mécanique céleste
Mlle VEIL T Physiologie générale
MM. LWOFF T Microbiologie
SIESTRUNK T Mécan. Phys. expérimentale
CABANNES T Mécanique théorique
CAIRE T Géo. phys. & géo. dynamique
COMOLET T Mécanique des fluides
DELLOUE T Physique de l'exosphère
HOULLON T Biologie animale
OLIVIER T Anthropologie
SAMUEL T Math. (ENS jeunes filles)
DE POSSEL T Analyse numérique
CHARLOT T Chimie analytique
CHATELET T Chimie CPEM
MATTIER T Physique SPCN
AUBOUIN T Géologie
Mme BENOIT-GEUTAL T Phys. nucléaire & radio-act.
MM. BOUGIS T Bio. vég. marine Villefranche a/mer
RIGAUDY T Chimie SPCN
COLLONGUES T Chimie appliquée
DUBERT T Biochimie
NOZIERES T Physiologie fondamentale
CADIOT T Chimie organique
IVANOFF T Oceanographie physique
FRANÇOIS T Zoologie
TALBOT T Génie chimique
MM. NOUGAREDE T Botanique
BRUHAT T Mathématiques MPC
FOURNET T Electricité générale
DEHEUVELS T Math. propédeutique
FURON T Géologie SPCN
Mme GANS T Génétique
MM. GENEVES T Biologie végétale CPEM
HUPE T Pétrographie
HOLLANDE T Biologie générale
LIONS T Analyse numérique
MAITTE T Chimie organique

MM. NICOLAS T Géologie appliquée
PANIGEL T Biologie générale
RAYER T Pétrographie
MOREL F. T Physiologie comparée
ROSEAU T Mécan. théorique des fluides
ROUBINE T Electronique E.S.E.
SILBER T Chimie CPEM
UEBERSFELD T Electronique
THIRY T Mécanique céleste
ABELES T Physique SPCN
AMAT T Thermodynamique
BALKANSKI T Physique M.P.C.
LE CORRE T Electricité
NATAF T Physique nucléaire & radio-act.
ECHALIER T Biologie animale CPEM
BARRAUD T Physique CPEM
DARS T Géo. structurale & appliquée
CAMEFORT T Botanique (agrégation)
VICHNIEWSKY T Mécan. industrielle
SIGWALT T Chimie SPCN
BLAQUIERE T Automatique
BARUCH T Physique propédeutique
ARNOUS T Physique théorique
SLONINSKI T Génétique
MALLIYAN T Math. propédeutique
GAUDEMAR T Chimie propédeutique
BROUSSE T Mécanique théorique
ROSCHE T Astronomie
GUY T Physique expérimentale
LAZARD T Mathématiques MPC
MOREL P. T Physique MPC
ARSAC T Programmation
LEFEBVRE T Chimie MPC
BOK T Physique fondamentale
CHAPEVILLE T Biochimie
BENOIT T Physique CPEM
RIOT T Chimie CPEM
JAUZEIN T Géologie ENS
PREVOST G. T Biologie cellulaire
FAVARD P. T Biologie animale CPEM
Mme CHARNIAUX-COTTON T Evol. des êtres organisés
Mlle FICINI T Chimie CPEM
MM. LEQUEUX T Astronomie
COHEN TANNOUDJI T Physique atomique
HERVE T Mathématiques
Mme PECKER-WIMEL T Astrophysique
MM. TAVERNIER T Physique PC
DURAND M. T Biologie animale SPCN
PASCAUD T Physiologie
Mme PETIT T Biologie animale CPEM
MM. CAGNAC T Electricité
FALK-VAIRANT T Physique nucléaire
KRASNER T Mathématiques
BENZECRI T Statistiques
VINH MAU T Physique M.G.P.
DUQUESNES T Physique CPEM
SCHUTZENBERGER T Programmation
TREMILLON T Chimie MPC
FAYARD T Chimie MPC
BUEY T Chimie CPEM
AUTHIER T Minér. et cristallographie
BONNEFILLE T Electrotechnique
Mme PUISEUX DAO T Biologie végétale
M. BERGER T Géométrie supérieure
Mlle LIBERMAN T Mathématiques
MM. DEBONDER T Biologie cellulaire
DUFOUR T Electronique I.U.T.
SCHAAAL T Chimie CPEM
BAUCHOT T Anatomie comparée
LANCE BV CPEM
GIRAUD T Botanique E.N.S.
HULIN T Physique PC
VIGIER T Génétique
GUERN T Biologie végétale
SLODZIAN T Physique CPEM
LACOMBE T Logique mathématique
TAVLITZKI T Biologie cellulaire
ARVIEU T Physique CPEM
TAXI T B.A. CPEM
COLLENOT T B.A. CPEM
BASSELIER T Chimie propédeutique
BADOUAL T Electronique I.U.T.

Le Secrétaire Général

R. POULLAIN



REMERCIEMENTS

Ce travail fut l'aboutissement d'une longue et étroite collaboration avec mes amis H. EPSTEIN, V. GLASER et R. STORA. Ils m'ont profondément soutenu tout au long de mes travaux de recherche et je tiens à rendre hommage ici à leur sincère amitié.

M. le Professeur P. LELONG a bien voulu accepter de patronner cette thèse et je lui en exprime ma profonde gratitude.

Je remercie très vivement le Professeur F. LURCAT qui a accepté de faire partie de mon jury.

J'exprime toute ma reconnaissance aux Professeurs C. BLOCH et A. MESSIAH qui m'ont accueilli dans leur Service de Physique Théorique, au sein duquel j'ai pu m'initier à la recherche scientifique.

Je remercie tout particulièrement E. BREZIN, G. MAHOUX, R. STORA ainsi que Mme PORNEUF pour l'aide qu'ils m'ont apportée dans les diverses formalités qui ont précédé ma soutenance de thèse, alors que j'étais immobilisé par la maladie.

Pour l'impression rapide de ce travail et le soin apporté à la présentation, je n'oublierai pas de remercier, outre Mme PORNEUF, Melle D. DUBOST.

PREFACE

Le travail que nous présentons est essentiellement composé de deux parties ayant fait l'objet de publications, la première dans les Comptes-Rendus de la R.C.P. n°25 (Strasbourg, 1965), la seconde dans "High-energy physics and elementary particles" (I.A.E.A., Vienne, 1965).

Dans la première partie sont exposées les propriétés algébriques de toutes les fonctions de Green d'un champ local, fonctions que l'on peut introduire pour généraliser les fonctions retardées et avancées classiques. A la fin de cette étude on arrive à la notion d'un domaine d'analyticité primitif de la fonction de n points et à l'existence de fonctions analytiques auxiliaires en lesquelles se décomposent les diverses fonctions de Green. Deux théorèmes principaux ayant été énoncés sans démonstration, nous avons complété cette première partie par l'adjonction de l'appendice A où sont exposées ces démonstrations. Nous nous sommes également affranchis de l'hypothèse simplificatrice qui consistait à considérer les champs comme des fonctions à valeurs opérateurs, en traitant dans l'appendice B le cas plus réaliste où les "fonctions de Green" sont des distributions.

Dans la seconde partie, le lecteur est invité à oublier la réexposition des propriétés algébriques (Chapitre 3) pour ne considérer que l'étude des procédés de complétion analytique (Chapitre 2) et leur application à l'agrandissement des domaines d'analyticité des fonctions de n points, particulièrement dans le cas $n = 4$ (Chapitre 4). Dans un prologue à cette deuxième partie, on a étudié une classe simple d'enveloppes d'holomorphie qui illustre nos procédés de complétion analytique. Enfin l'appendice C est destiné à compléter la démonstration de la propriété de croisement exposée au Chapitre 4.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

I - INTRODUCTION AU "CONTENU PHYSIQUE"

Dans l'état actuel de la physique des particules élémentaires, on ne possède aucun modèle calculable de théorie quantique des champs qui permette d'expliquer convenablement les résultats expérimentaux. Cette situation a conduit certains physiciens ^[1] à développer une "théorie axiomatique des champs" où, partant d'une formulation mathématique précise de quelques principes généraux et physiquement raisonnables et s'appuyant sur les concepts traditionnels de la mécanique quantique relativiste, on essaie de déduire le maximum de propriétés pour les quantités observables. En fait, il n'a pas été possible jusqu'à présent de démontrer même l'existence d'un modèle non trivial satisfaisant à tous les axiomes que l'on désire imposer, le seul modèle calculable étant le champ libre, lequel décrit des particules sans interaction. Inversement, il se peut que ce cadre axiomatique soit trop général et renferme plusieurs modèles, dont un seul (au maximum) convienne à la physique.

La "théorie axiomatique" n'est donc pas une théorie à proprement parler, mais seulement une méthode d'approche systématique de la théorie des champs. Son intérêt consiste d'abord en l'étude de la cohérence logique des concepts utilisés par les physiciens. Ainsi, partant de la notion d'opérateur de champ (héritée de la quantification du champ électromagnétique classique), on peut démontrer indépendamment de tout modèle, que la notion de particules entrantes au temps $t \rightarrow -\infty$ et sortantes au temps $t \rightarrow +\infty$ en est une conséquence, pourvu que ce champ satisfasse à certaines propriétés générales (interprétées comme la causalité, l'invariance par rapport au groupe de POINCARÉ, la positivité de l'énergie etc...) .

Après avoir introduit les particules élémentaires comme des formes asymptotiques du champ, la méthode axiomatique permet alors d'établir quelques propriétés générales des amplitudes de diffusion de ces particules qui semblent en bon accord avec l'expérience. Nous allons donner un exemple particulièrement important de ce genre de propriétés.

Rappelons que les amplitudes de diffusion (principales quantités observables)

sont des fonctions $f_{\alpha}(p_1 \dots p_m ; p_{m+1} \dots p_n)$ de n "quadrivecteurs" de l'espace-temps $\mathbb{R}^4$; dans cette notation l'indice α désigne une réaction où interviennent m particules entrantes d'un type déterminé, de quadri-impulsions $p_1 \dots p_m$ et $n - m$ particules sortantes d'un type déterminé et de quadri-impulsions $p_{m+1} \dots p_n$. (Tous ces quadrivecteurs sont en fait liés par la relation $p_1 + \dots + p_m = p_{m+1} + \dots + p_n$ qui traduit la conservation de l'énergie et de l'impulsion). Une notion fondamentale, que l'approche axiomatique a permis de dégager, est que dans tout modèle satisfaisant aux axiomes (si un tel modèle existe), les fonctions $f_{\alpha}(p_1 \dots p_n)$ doivent être des valeurs au bord sur les réels de certaines fonctions analytiques de n quadrivecteurs complexes $F_{\beta}(k_1 \dots k_n)$;

$$(k_1 = p_1 + i q_1 \in \mathbb{C}^4 ; 1 \leq i \leq n) .$$

Un exemple de propriété intéressante (bien que difficile à exprimer quantitativement) qui en résulte est la notion de "croisement" que nous allons expliquer très brièvement.

Soient deux amplitudes de diffusion notées :

$$f_1(p_1 p_2 ; p_3 p_4)$$

et $f_2(p_1^i, p_3^i ; p_2^i, p_4^i)$

faisant intervenir les mêmes particules $a_i (i = 1, 2, 3, 4)$, mais tantôt sous la forme "particule", tantôt sous la forme "antiparticule"; f_1 et f_2 correspondent respectivement aux réactions suivantes :



On passe de la réaction (1) à la réaction (2) en remplaçant la particule entrante a_2 par l'antiparticule associée $\bar{a}_2$ sortante, et la particule sortante a_3 par l'antiparticule associée $\bar{a}_3$ entrante. Physiquement les deux processus correspondent à des conditions expérimentales très différentes (par exemple : (1) est la diffusion d'un méson π sur un proton : $\pi + p \rightarrow \pi + p$; (2) est l'annihilation d'une paire proton-antiproton en deux mésons π : $p + \bar{p} \rightarrow \pi + \pi$).

Or, on peut montrer qu'il existe une seule fonction analytique : $F(k_1, k_2, k_3, k_4)$ telle que :

$$f_{\alpha_1}(p_1, p_2; p_3, p_4) = \lim_{q_1 \rightarrow 0} F(p_1 + iq_1, p_2 + iq_2, -p_3 - iq_3, -p_4 - iq_4) \quad (3)$$

$$\text{et } f_{\alpha_2}(p_1^*, p_3^*; p_2^*, p_4^*) = \lim_{q_1^* \rightarrow 0} F(p_1^* + iq_1^*, -p_2^* - iq_2^*, p_3^* + iq_3^*, -p_4^* - iq_4^*). \quad (4)$$

(Les limites étant prises dans des régions différentes dans les formules (3) et (4)).

Cette notion de prolongement analytique reliant 2 amplitudes qui correspondent à des processus physiques différents peut dans les meilleurs des cas s'exprimer quantitativement par des équations intégrales appelées "relations de dispersion" (du type : formule de CAUCHY à une ou plusieurs variables) ; celles qui ont pu être démontrées dans le cadre de la théorie axiomatique des champs sont bien vérifiées par l'expérience.

Le problème de l'obtention à partir des axiomes d'un domaine d'analyticité maximum pour les amplitudes de diffusion se ramène à deux types de problèmes mathématiques (intervenant simultanément de façon complexe) :

1°) Etude de la structure algébrique d'un ensemble de valeurs au bord de fonctions analytiques dans certains tubes $\mathcal{C}_\lambda = \mathbb{R}^{4n} + i \Gamma_\lambda$ (où les Γ_λ sont des cônes de sommet l'origine dans $\mathbb{R}^{4n}$).

2°) Problèmes d'enveloppe d'holomorphie.

Dans cet exposé, nous nous proposons de montrer comment les axiomes de la théorie de WIGHTMAN conduisent à un problème bien particulier de valeurs au bord, et d'en décrire en détail l'aspect algébrique.

II - INTRODUCTION A LA FORMULATION MATHÉMATIQUE

a) Notations

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ (espace-temps relativiste) est muni du produit scalaire de MINKOWSKI :

$$x.y = x^{(0)}y^{(0)} - x^{(1)}y^{(1)} - x^{(2)}y^{(2)} - x^{(3)}y^{(3)} \quad (x, y \in \mathbb{R}^4)$$

et on note $x.x = x^2$.

Le cône "futur" V^+ (resp. "passé" V^-) est défini par :

$$V^\pm = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x^2 > 0 \ , \ x^{(0)} \gtrless 0 \right\} \ ; \ \overline{V}^+ \text{ est la fermeture de } V^+$$

Deux points $x, y \in \mathbb{R}^4$ sont dits en position relative du "genre espace" (resp. du "genre temps") si $(x - y)^2 < 0$ (resp. $(x - y)^2 > 0$).

La transformation de Fourier est définie par :

$$\tilde{f}(p_1, \dots, p_n) = \int e^{i \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i} f(x_1, \dots, x_n) d_4 x_1 \dots d_4 x_n$$

(où $x_i \in \mathbb{R}_x^4$, $p_i \in \mathbb{R}_p^4$; $1 \leq i \leq n$).

L'espace $\mathbb{R}_x^4$ est l'espace des positions et l'espace $\mathbb{R}_p^4$ l'espace des impulsions.

b) Les axiomes de WIGHTMAN

Nous rappellerons succinctement les principaux axiomes de WIGHTMAN ; pour plus de détails le lecteur pourra se reporter par exemple aux livres cités aux références A et B. Les grandeurs fondamentales introduites dans la théorie sont des opérateurs non bornés :

$$A_1(f) = \int A_1(x) f(x) d_4 x, (x = (x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}))$$

agissant dans un espace de HILBERT $\mathcal{H}$.

Les $A_1(f)$ sont supposés définis pour toute fonction à décroissance rapide $f \in \mathcal{S}^4$. L'indice entier i permet par exemple de distinguer des champs ayant des propriétés de covariance différentes par rapport au groupe de POINCARÉ, mais ne jouera aucun rôle dans les propriétés générales que nous désirons étudier ici ; aussi le négligerons nous dans la suite, afin de simplifier l'écriture.

Tous les opérateurs $A_i(f)$ sont supposés avoir un domaine commun dense dans $\mathcal{H}$, stable par l'action des $A_i(f)$ et sur lequel agissent également tous les opérateurs adjoints $A_i(f)^*$. On suppose en outre, que pour tout couple d'états $\Phi, \Psi \in D$, l'application $f \rightarrow \langle \Phi, A_i(f) \Psi \rangle$ définit une distribution tempérée.

Les axiomes que nous allons utiliser ici, sont les suivants :

1°) Causalité : Pour tout couple de fonctions $f, g \in \mathcal{S}^4$ tel que

$$(x - y)^2 < 0, \quad \forall x \in \text{support de } f, \\ \forall y \in \text{support de } g,$$

on a : $[A_i(f), A_j(g)] = 0 \quad (\forall i, j)$

2°) Invariance par translation : Il existe dans $\mathcal{H}$ une représentation unitaire continue du groupe des translations de l'espace temps, notée $a \rightarrow T_a (a \in \mathbb{R}^4)$; de plus $\forall a \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$A_i(f) = T_a^{-1} A_i(f_a) T_a ,$$

où $f_a(x) = f(x - a) .$

3°) Positivité de l'énergie ou "Condition spectrale" : Le groupe T_a admet une représentation spectrale du type :

$$T_a = \int e^{i a \cdot p} d E_p$$

(théorème de STONE généralisé (cf. A)), où $d E_p$ est une mesure à valeur opérateur ; on suppose que le support de cette mesure est contenu dans le cône $\bar{V}^+$. (Ceci exprime de façon invariante relativiste la positivité de l'opérateur autoadjoint

$$H = \int p^{(0)} d E_p ,$$

lequel est interprété comme l'hamiltonien ou l'opérateur d'énergie du système).

4°) Existence d'un vecteur unique Ω de $\mathcal{H}$, appelé "vide", tel que :

$$T_a \Omega = \Omega, \forall a \in \mathbb{R}^4 .$$

Nous voulons seulement exposer ici les propriétés algébriques de certaines

quantités appelées "opérateurs retardés généralisés" (O.R.G) que l'on obtient en multipliant des monômes $A(x_{i_1}) \dots A(x_{i_n})$ par diverses combinaisons de fonctions de saut $\theta(x_{i_1}^{(0)} - x_j^{(0)})$;

$(i_1, \dots, i_n)$ désigne une permutation quelconque de $\{1, 2 \dots n\}$, et $\theta(t)$ est la fonction de HEAVYSIDE ($\theta(t) = 1$ si $t \geq 0$, $\theta(t) = 0$ si $t < 0$).

La notation $A(x_1) \dots A(x_n)$ désigne une fonctionnelle multilinéaire sur $\mathcal{S}^4$ à valeur opérateur définie de la manière suivante :

A tout ensemble $\{f_1, \dots, f_n\}$ de fonctions de $\mathcal{S}^4$, on associe l'opérateur non borné $A(f_1) A(f_2) \dots A(f_n)$ (dont le domaine contient au moins D par hypothèse). Grâce au théorème nucléaire, cette fonctionnelle possède l'importante propriété suivante :

Pour tout couple de vecteurs $\Phi, \Psi \in D$, il existe une distribution tempérée notée

$$\langle \Phi, A(x_1) \dots A(x_n) \Psi \rangle \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{telle que : } \int \langle \Phi, A(x_1) \dots A(x_n) \Psi \rangle f_1(x_1) \dots f_n(x_n) d_4 x_1 \dots d_4 x_n \\ = \langle \Phi, A(f_1) \dots A(f_n) \Psi \rangle. \end{aligned}$$

REMARQUES :

L'introduction dans la théorie de distributions tempérées plutôt que de fonctions se justifie par l'exemple du champ libre (seul exemple calculable) où l'on constate que les quantités (5) ne sont pas des fonctions, et par l'usage constant que l'on veut faire de la transformation de FOURIER.

Les axiomes énoncés ci-dessus vont impliquer à la fois des propriétés de support des O.R.G dans l'espace des positions et des propriétés de support de leurs

transformées de FOURIER $\widetilde{\text{O.R.G}}$ dans l'espace des impulsions.

En fait, la multiplication de distributions du type (5) par des fonctions $\theta(x_i^{(0)} - x_j^{(0)})$ ne peut se faire qu'au prix d'un procédé de régularisation dont l'inconvénient majeur est de faire dépendre les supports des O.R.G de ce procédé ; on obtient ainsi des supports plus grands que ceux que l'on obtiendrait si les $\langle \Phi, A(x_1) \dots A(x_n) \psi \rangle$ étaient des fonctions.

C'est un problème ouvert et non trivial (seulement résolu affirmativement par R. STORA⁽⁸⁾ et par H. EPSTEIN et V. GLASER dans le cas $n = 3$) de savoir si l'on peut encore définir des O.R.G au sens des distributions, en préservant exactement^(*) les propriétés de support que l'on obtient dans le cas des fonctions (à la fois dans l'espace des x et dans l'espace des p).

Etant uniquement intéressés ici par les propriétés algébriques des O.R.G, nous traiterons $A(x)$ comme un véritable champ d'opérateurs ; ainsi les monômes $A(x_{i_1}) \dots A(x_{i_n})$ seront dans cet exposé des fonctions sur $\mathbb{R}^{4n}$ à valeurs opérateurs dans $\mathcal{H}$ et pourront être multipliés sans ambiguïté par des fonctions $\theta(x_{i_1}^{(0)} - x_{j_1}^{(0)})$.

(*)

Toutefois, il est relativement facile de maintenir ces supports dans un voisinage arbitrairement petit des supports correspondant au cas des fonctions.

III - STRUCTURE ALGEBRIQUE DE L'ENSEMBLE DES O.R.G.

On considère l'algèbre associative $\mathcal{A}$ sur l'anneau des entiers, définie de la façon suivante :

On construit l'algèbre associative libre engendrée par la somme de deux ensembles d'éléments $\{A_i ; i \text{ entier positif}\}$ et $\{\theta_{jk} ; j, k \text{ entiers positifs ; } j \neq k\}$; on prend le quotient de cette algèbre libre par l'idéal engendré par tous les commutateurs $[\theta_{ij}, A_k], [\theta_{ij}, \theta_{kl}]$ ($\forall i, j, k, l$) et par tous les éléments à répétitions (c'est-à-dire les monômes contenant au moins deux fois un même facteur A_i ou θ_{jk}) ; enfin, on lui adjoint un élément unité e .

Cette algèbre $\mathcal{A}$ est automatiquement graduée de la façon suivante :

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{A}^{(n)}$$

où $\mathcal{A}^{(n)}$ est engendrée par les monômes homogènes de degré n par rapport aux A_i , et on a :

$$\forall n \quad \mathcal{A}^{(n)} = \bigoplus_I \mathcal{A}^{(n)}_I$$

où I est un ensemble quelconque de n entiers positifs.

Dans $\mathcal{A}$, on introduit pour tout entier $j > 0$ des dérivations notées $A_j \uparrow, A_j \downarrow, \hat{A}_j$ en définissant leur action sur les générateurs de $\mathcal{A}$ par la règle suivante :

1°) Appliquées aux θ_{jk} , toutes ces dérivations donnent zéro.

$$2^\circ) A_j \uparrow A_i = \theta_{ji} [A_j, A_i]$$

$$A_j \downarrow A_i = -\theta_{ij} [A_j, A_i]$$

(6)

$$\hat{A}_j A_1 = [A_j, A_1] \quad (\text{dérivation intérieure associée à l'élément } A_j).$$

Calculons le commutateur de deux dérivations ayant des flèches de même sens ; c'est une dérivation dont l'action sur les θ_{ij} donne zéro et dont l'action sur les A_j est donnée par :

$$[A_1^\uparrow, A_k^\uparrow] A_j = (A_1^\uparrow A_k^\uparrow - A_k^\uparrow A_1^\uparrow) A_j = (\theta_{1j} \theta_{kj} - \theta_{1j} \theta_{ki} - \theta_{kj} \theta_{ik}) [[A_k, A_1], A_j]$$

$$[A_1^\downarrow, A_k^\downarrow] A_j = (\theta_{j1} \theta_{jk} - \theta_{j1} \theta_{ik} - \theta_{jk} \theta_{ki}) [[A_k, A_1], A_j] . \quad (7)$$

Dans la suite, on imposera en outre que les relations suivantes soient vérifiées dans $\mathcal{A}$:

$$\forall ijk \quad \left[\begin{array}{l} \theta_{1j} \theta_{kj} - \theta_{1j} \theta_{ki} - \theta_{kj} \theta_{ik} = 0 \\ \theta_{j1} \theta_{jk} - \theta_{j1} \theta_{ik} - \theta_{jk} \theta_{ki} = 0 \\ \theta_{ij} + \theta_{ji} = e . \end{array} \right. \quad (8)$$

L'ensemble des relations (8) implique donc d'après (6) et (7) les propriétés suivantes des dérivations $A_j^\uparrow$, $A_j^\downarrow$, $\hat{A}_j$:

$$[A_1^\uparrow, A_j^\uparrow] = [A_1^\downarrow, A_j^\downarrow] = 0 \quad \forall i, j \quad (9)$$

$$\hat{A}_j = A_j^\uparrow - A_j^\downarrow \quad \forall j . \quad (9')$$

L'ensemble des dérivations $A_j^\uparrow, A_j^\downarrow$ (j entier ≥ 0) engendre une algèbre de Lie $\mathcal{D}$ qui peut être construite (à un isomorphisme près) de la façon suivante :

on forme l'algèbre de Lie libre engendrée par $\{A_j^\uparrow, A_j^\downarrow; j \text{ entier positif}\}$ et on en fait le quotient par l'idéal défini par les relations (9) et par l'annulation des éléments à répétition. $\mathcal{D}$ est évidemment graduée : $\mathcal{D} = \bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{D}^{(n)}$, où $\mathcal{D}^{(n)}$ est le sous espace des éléments homogènes de degré n .

Définition.

On appelle monôme de flèches d'ordre n tout élément de $\mathcal{A}^{(n)}$ de la forme :

$$A_{i_1}^\uparrow \dots A_{i_{n-1}}^\uparrow A_{i_n}^\uparrow, \quad (10)$$

où le symbole $A_i^\uparrow$ désigne l'une ou l'autre des dérivations $A_i^\uparrow, A_i^\downarrow$.

Soit $M^{(n)}$ l'ensemble de ces monômes d'ordre n ; on appelle $M^{(n)}$ le sous-espace de $\mathcal{A}^{(n)}$ engendré par les éléments de $M^{(n)}$ et on pose :

$$M = \bigoplus_{n \geq 1} M^{(n)}.$$

A tout monôme de flèches de la forme (10) est associé un élément unique de $\mathcal{D}^{(n)}$ qui est la dérivation intérieure que ce monôme définit dans $\mathcal{A}$, et dans $\mathcal{D}$ on a l'égalité (*) :

$$A_{i_1}^\uparrow \dots A_{i_{n-1}}^\uparrow A_{i_n}^\uparrow = \left[A_{i_1}^\uparrow \left[\dots \left[A_{i_{n-1}}^\uparrow, \hat{A}_{i_n} \right] \dots \right] \right] \quad (11)$$

(où le symbole $\hat{B}$ dénote la dérivation intérieure associée à un élément quelconque B de $\mathcal{A}$).

(*) Puisque pour tout $B, C \in \mathcal{A}$, on a :

$$\widehat{A_i^\uparrow C} B = [A_i^\uparrow C, B] = A_i^\uparrow [C, B] - [C, A_i^\uparrow B] = (A_i^\uparrow \hat{C} - \hat{C} A_i^\uparrow) B.$$

L'ensemble des éléments de la forme (11) engendre un sous-espace de $\mathcal{D}_+$ isomorphe à M : c'est l'idéal de $\mathcal{D}$ engendré par les éléments $\hat{A}_j = A_j^\uparrow - A_j^\downarrow$. On vérifie trivialement que pour $n \geq 2$, $\mathcal{D}^{(n)}$ est en fait isomorphe à $M^{(n)}$; dans la suite, on désignera par i_n l'isomorphisme qui applique $\mathcal{D}^{(n)}$ sur $M^{(n)}$. Il résulte des relations (9) et (11) qu'à tout monôme de Lie emboité du type :

$$\mu_\alpha = [A_{i_1}^\uparrow, [A_{i_2}^\uparrow \dots [A_{i_{n-1}}^\downarrow, A_{i_n}^\uparrow] \dots]] \in \mathcal{D}^{(n)}, \quad (12)$$

l'isomorphisme i_n associe le monôme de flèche

$$m_\alpha = i_n(\mu_\alpha) = A_{i_1}^\uparrow A_{i_2}^\uparrow \dots A_{i_{n-1}}^\downarrow A_{i_n}^\uparrow \in M^{(n)}$$

(dans cette notation, l'indice α représente la donnée de l'ensemble ordonné d'indices $i_1, i_2 \dots i_n$ à chacun desquels on a assigné une flèche d'un sens déterminé).

Les éléments de $M^{(n)}$ ne sont pas linéairement indépendants dans M ; ils vérifient un système de relations linéaires, appelées "relations de Steinmann" [2] ; on obtient ces relations (à l'isomorphisme i_n près) en considérant tous les monômes de Lie emboités d'ordre n du type (12), et en écrivant toutes les relations résultant de l'identité de Jacobi et des conditions (9) et (9') auxquelles satisfont ces monômes emboités.

Evidemment, on obtient autant de systèmes de relations indépendantes que de couples d'ensembles d'entiers positifs (I_+, I_-) . A un tel couple correspond un système de relations linéaires $S_{I_+, I_-}^{(n)}$ entre les monômes emboités du type (12) dont les facteurs appartiennent à $\{A_i^\uparrow, A_j^\downarrow, i \in I_+, j \in I_-\}$. On désignera par $\mathcal{D}_{I_+ I_-}^{(n)}$ le sous-espace de $\mathcal{D}^{(n)}$ engendré par ces éléments.

Exemple : la plus petite valeur de n pour laquelle on a un système non trivial est $n = 4$. $I_+ = \{1, 2\}$, $I_- = \{3, 4\}$.

On a alors la relation (unique) :

$$\begin{aligned} & \left[A_2^{\uparrow}, [A_4^{\downarrow}, [A_3^{\downarrow}, A_1^{\uparrow}]] \right] - \left[A_4^{\downarrow}, [A_2^{\uparrow}, [A_3^{\downarrow}, A_1^{\uparrow}]] \right] \\ &= \left[A_1^{\uparrow}, [A_3^{\downarrow}, [A_2^{\uparrow}, A_4^{\downarrow}]] \right] - \left[A_3^{\downarrow}, [A_1^{\uparrow}, [A_2^{\uparrow}, A_4^{\downarrow}]] \right] \\ & \quad \left(= \left[[A_2^{\uparrow}, A_4^{\downarrow}], [A_3^{\downarrow}, A_1^{\uparrow}] \right] \right), \end{aligned}$$

et, dans $\mathcal{M}^{(4)}$, la relation correspondante entre les monômes de flèches :

$$A_2^{\uparrow} A_4^{\downarrow} A_3^{\downarrow} A_1^{\uparrow} - A_4^{\downarrow} A_2^{\uparrow} A_1^{\uparrow} A_3^{\downarrow} = -A_1^{\uparrow} A_3^{\downarrow} A_4^{\downarrow} A_2^{\uparrow} + A_3^{\downarrow} A_1^{\uparrow} A_2^{\uparrow} A_4^{\downarrow} \quad (13)$$

Définition des O.R.G. de Steinmann.

On définit un homomorphisme h de l'algèbre $\mathcal{A}$ dans l'algèbre tensorielle $\mathcal{O}$ des champs d'opérateurs dans $\mathcal{K}$ en associant :

- à tout élément A_1 , le champ $A(x_1)$ ($x_1 \in \mathbb{R}_1^4$) défini au chapitre II.

- à tout élément θ_{1j} tel que $i < j$, le champ scalaire $\theta_{1j}(x) = \theta(x_1^{(0)} - x_j^{(0)}) \times \mathbb{1}$, $\mathbb{1}$ étant l'opérateur identité dans $\mathcal{K}$ (et $\theta(t) = 1$ si $t \geq 0$; $\theta(t) = 0$ si $t < 0$).

- à tout élément $\theta_{i,j}$ tel que $i > j$, le champ scalaire

$$\theta_{ij}(x) = (1 - \theta(x_j^{(0)} - x_i^{(0)})) \times \mathbb{1}.$$

- à l'unité e de l'algèbre $\mathcal{A}$, le champ constant $\mathbb{1}$.

Il est clair que cette correspondance définit bien un homomorphisme puisque les homologues des relations (8) sont identiquement satisfaites par les fonctions $\theta_{ij}(x)$.

Par définition, les "O.R.G. de Steinmann" [2] sont les images par cet homomorphisme h des monômes de flèches définis plus haut.

Par exemple à $A_1 \uparrow A_2 = \theta_{12} [A_1, A_2]$ correspond "l'opérateur retardé de deux points" :

$$\theta(x_1^{(0)} - x_2^{(0)}) [A(x_1), A(x_2)] ;$$

à $A_1 \uparrow A_2 \uparrow A_3$ correspond "l'opérateur retardé de trois points" :

$$\begin{aligned} & \theta(x_2^{(0)} - x_3^{(0)}) \theta(x_1^{(0)} - x_2^{(0)}) \left[[A(x_1) A(x_2)] A(x_3) \right] + \theta(x_2^{(0)} - x_3^{(0)}) \theta(x_1^{(0)} - x_3^{(0)}) \dots \\ & \dots \left[A(x_2), [A(x_1) A(x_3)] \right] ; \end{aligned}$$

on écrirait de la même façon les 32 O.R.G. de quatre points (x_1, x_2, x_3, x_4) ; ceux-ci vérifient 6 relations de Steinmann, obtenues en transcrivant l'équation (13) pour tous les couples (i_1, i_2) , (i_3, i_4) .

Plus généralement, à tout monôme de flèches $m_\alpha = i_n(\mu_\alpha) \in M^{(n)}$ sera associé un O.R.G. de Steinmann noté :

$$m_\alpha(x_{i_1} \dots x_{i_n}) = h(m_\alpha) = h \circ i_n(\mu_\alpha) .$$

A tout O.R.G., on fait correspondre une "fonction retardée généralisée" (F.R.G) qui est l'élément de matrice $\langle \Omega, m_\alpha(x_{i_1} \dots x_{i_n}) \Omega \rangle$, Ω désignant le

vecteur "vide" introduit au chapitre II, (4ème axiome).

A cause des propriétés d'invariance par le groupe des translations (2ème et 4ème axiomes), on a :

$$\begin{aligned} & \langle \Omega, m_{\alpha}(x_1 + a, x_2 + a, \dots, x_n + a) \Omega \rangle \\ &= \langle \Omega, T_a m_{\alpha}(x_1, x_2, \dots, x_n) T_a^{-1} \Omega \rangle \\ &= \langle \Omega, m_{\alpha}(x_1, x_2, \dots, x_n) \Omega \rangle, \end{aligned}$$

ce qui montre que les F.R.G. sont en fait des fonctions définies sur le quotient de $\mathbb{R}^{4n}$ par l'espace diagonal $\{x_1 = a, x_2 = a, \dots, x_n = a\}$, c'est-à-dire des fonctions de $(n-1)$ quadrvecteurs indépendants $x_1 \sim x_j$.

Corrélativement les transformées de Fourier $\widetilde{\text{F.R.G.}}(p_1 \dots p_n)$ des F.R.G. $(x_1 \dots x_n)$ sont de la forme :

$$\delta(p_1 + \dots + p_n) \times \widetilde{\text{F.R.G.}}'(p_1, \dots, p_{n-1}) \quad (\delta \text{ étant la mesure de Dirac}),$$

puisque le produit scalaire $\sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i$ peut s'écrire :

$$\sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i = (p_1 + \dots + p_n) \cdot x_1 + \sum_{i=2}^n p_i \cdot (x_i - x_1).$$

Ce facteur $\delta(p_1 + \dots + p_n)$ est l'origine de la règle de conservation de l'énergie et de l'impulsion qui apparaît ainsi comme une conséquence directe de l'invariance de la théorie par les translations d'espace-temps.

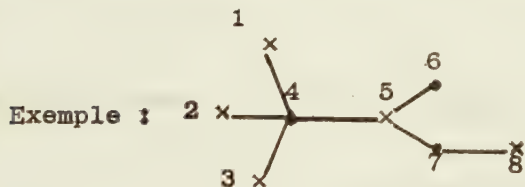
IV - ALGÈBRE DE GRAPHS ET CONES ASSOCIES

a) L'algèbre de Lie Λ :

Soient I^+, I^- deux ensembles quelconques et disjoints d'entiers positifs. On désigne par $T_{I^+ I^-}^{(n)}$ l'ensemble des graphes simplement connexes ou "arbres" possédant les propriétés suivantes :

- 1°) Le nombre de sommets est égal à n (et par suite le nombre de lignes $n - 1$).
- 2°) Les sommets sont de deux types repérés respectivement par les entiers appartenant aux ensembles I^+ et I^- .
- 3°) Toute ligne de l'arbre relie un sommet $i \in I^+$ à un sommet $j \in I^-$.

Graphiquement, chaque sommet $i \in I^+$ est représenté par une croix x_i et chaque sommet $j \in I^-$ par un point $\cdot_j$.



$$\in T_{I^+ I^-}^{(8)} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} I^+ &= \{1, 2, 3, 5, 8\} , \\ I^- &= \{4, 6, 7\} . \end{aligned}$$

Pour tout couple d'ensembles disjoints (I^+, I^-) , on considère le module libre $\Lambda_{I^+ I^-}^{(n)}$ sur l'anneau des entiers dont la base est l'ensemble d'arbres $T_{I^+ I^-}^{(n)}$.

On définit alors Λ comme la somme directe de tous les modules $\Lambda_{I^+ I^-}^{(n)}$.

Sur le module Λ , on peut mettre une structure d'algèbre de Lie (bien qu'il n'y ait pas d'algèbre associative naturelle) en définissant le produit suivant :

$$\text{A tout couple d'arbres } t_1 \in T_{I_1^+ I_1^-}^{n_1}, \quad t_2 \in T_{I_2^+ I_2^-}^{n_2}, \text{ on associe}$$

$$\text{le crochet } [t_1, t_2] = \sum_{\substack{i_1 \in I_1^+ \\ j_2 \in I_2^-}} \begin{array}{c} t_1 \quad t_2 \\ \circ \quad \circ \\ \times_{i_1} \text{---} j_2 \end{array} - \sum_{\substack{j_1 \in I_1^- \\ i_2 \in I_2^+}} \begin{array}{c} t_1 \quad t_2 \\ \circ \quad \circ \\ j_1 \text{---} i_2 \end{array} .$$

Chaque terme du second membre est un arbre appartenant à $T^{(n_1+n_2)}_{I_1^+ \cup I_2^+, I_1^- \cup I_2^-}$.

On ajoute aussi la règle $[t_1, t_2] = 0$, si les ensembles

$I_1^+, I_2^+, I_1^-, I_2^-$ ne sont pas tous disjoints deux à deux. On vérifie aisément que ce produit est anticommutatif et que l'identité de Jacobi est satisfaite.

On définit alors un homomorphisme ℓ unique de l'algèbre de Lie $\mathcal{D}$ dans Δ , en posant :

$$\begin{aligned} \ell(A_1 \uparrow) &= x_1 \in T^1 \\ \ell(A_1 \downarrow) &= \bullet_1 \in T^1 ; \end{aligned}$$

en effet les éléments $A_i \uparrow$ engendrent toute l'algèbre $\mathcal{D}$.

On a par exemple :

$$\begin{aligned} \ell([A_1 \uparrow, A_2 \downarrow]) &= x_1 \text{---} \bullet_2 \\ \ell([A_1 \uparrow, [A_2 \uparrow, A_3 \downarrow]]) &= \begin{array}{c} 1 \times \quad \quad \bullet_3 \\ 2 \times \quad \quad \bullet_3 \end{array} \\ \ell([A_1 \uparrow, [A_2 \downarrow, [A_3 \downarrow, A_4 \uparrow]]]) &= \begin{array}{c} \quad \quad \quad \bullet_3 \\ \quad \quad \quad \times_4 \\ \times_1 \text{---} \bullet_2 \end{array} + \begin{array}{c} \quad \quad \quad \bullet_3 \\ \quad \quad \quad \times_4 \\ \bullet_2 \end{array} . \end{aligned}$$

Plus généralement, pour tout monôme emboîté $\mu_\alpha \in \mathcal{D}^{(n)}_{I^+ I^-}$, on obtient :

$$\ell(\mu_\alpha) = (-1)^{n^-} \sum_{\beta} k_{\alpha\beta} t_\beta \in \Delta^{(n)}_{I^+ I^-} \quad (14)$$

où la sommation s'étend à tous les arbres $t_\beta \in T_{I^+I^-}^{(n)}$, et où les coefficients $k_{\alpha\beta}$ sont égaux à 0 ou à 1 ; n^- désigne le nombre d'éléments de I^- (*).

Nous nous contenterons d'énoncer ici sans démonstration le théorème suivant :

Théorème IV.1 : l'homomorphisme ℓ est injectif.

Il en résulte la propriété suivante :

Corollaire : A tout arbre $t_\beta \in T_{I^+I^-}^{(n)}$, on peut associer un élément

$F_\beta(x_{i_1} \dots, x_{i_n})$ (où $\{i_1, \dots, i_n\} = I^+ \cup I^-$) de l'algèbre tensorielle $\mathcal{O}$, de façon que tout O.R.G. $m_\alpha(x_{i_1} \dots x_{i_n}) = h \circ i_n(\mu_\alpha)$ s'écrive :

$$m_\alpha(x_{i_1} \dots x_{i_n}) = (-1)^{n^-} \sum_{\beta} k_{\alpha\beta} F_\beta(x_1 \dots x_n), \quad (15)$$

et que les relations de Steinmann qui relient les m_α soient automatiquement satisfaites.

Démonstration : D'après le théorème 1, il existe un homomorphisme de modules qui applique le sous-espace $\ell \left(\mathcal{D}_{I^+I^-}^{(n)} \right)$ de Λ dans $\mathcal{O}$; il est défini par $h \circ i_n$ où i_n est l'injection de $\mathcal{D}_{I^+I^-}^{(n)}$ dans $\Lambda^{(n)}$. Cet homomorphisme s'étend à tout le sous-espace $T_{I^+I^-}^{(n)}$ (il suffit pour cela que le quotient $\Lambda_{I^+I^-}^{(n)} / \ell \left(\mathcal{D}_{I^+I^-}^{(n)} \right)$ admette une base, ce qui se vérifie

(*) On convenant d'écrire toujours les m_α comme dans la formule (12), c'est-à-dire avec la flèche la plus à droite du type $\uparrow$.

au cours de la démonstration du théorème 1). Par suite, l'ensemble des relations (14) se transporte dans $\mathcal{O}$ et on obtient ainsi les relations (15).

Remarque : Pour établir la formule (15) on n'a aucunement fait usage des axiomes physiques exposés au chapitre II. Notamment le 1er axiome va introduire des propriétés de support pour les O.R.G $m_\alpha(x_{i_1} \dots x_{i_n})$, que nous étudierons au chapitre suivant ; on énoncera alors un théorème meilleur que le précédent, d'après lequel il est encore possible de satisfaire à l'égalité (15) avec des champs d'opérateurs $F_\beta(x_{i_1} \dots x_{i_n})$ ayant des supports adéquats.

b) Cônes associés :

Nous considérons dans ce paragraphe deux espaces $\mathbb{R}^n$ notés respectivement $\mathbb{R}_t^n$ et $\mathbb{R}_s^n$; les points de $\mathbb{R}_t^n$ sont décrits par leurs coordonnées $(t_1, t_2, \dots, t_n) \equiv t$, et ceux de $\mathbb{R}_s^n$ par $(s_1, s_2, \dots, s_n) \equiv s$. On va décrire des ensembles de cônes polyédraux de sommet l'origine dans $\mathbb{R}_t^n$ et $\mathbb{R}_s^n$; à chaque cône h_n de $\mathbb{R}_t^n$ correspondra dans $\mathbb{R}_s^n$ le cône dual par rapport à la forme bilinéaire $\sum_{i=1}^n s_i t_i$, que l'on notera $\tilde{h}$ ($\tilde{h} = \{s ; \sum_{i=1}^n s_i t_i \geq 0 ; \forall t \in h\}$). En fait tous les cônes h que l'on définira dans $\mathbb{R}_t^n$ seront invariants par les translations $t_i \rightarrow t_i + a$ ($1 \leq i \leq n$), de sorte que les cônes $\tilde{h}$ correspondants seront aplatis et appartiendront à l'hyperplan $\sum_{i=1}^n s_i = 0$, noté P_s^{n-1} .

1°) A toute partition de $\{1, 2, \dots, n\}$ en deux sous-ensembles non vides I^+, I^- , on associe un cône $\pi_{I^+ I^-}^{(n)}$ défini dans P_s^{n-1} par :

$$\pi_{I^+ I^-}^{(n)} = \left\{ s ; \sum_{k=1}^n s_k = 0 ; s_i > 0 ; \forall i \in I^+ ; s_j < 0 ; \forall j \in I^- \right\} .$$

Tous ces cônes sont disjoints et l'union des cônes fermés $\overline{\pi_{I^+ I^-}^{(n)}}$ est tout l'espace P_s^{n-1} .

2°) A tout arbre $t_\beta \in T_{I^+I^-}^{(n)}$, on associe le cône

$$c_\beta = \{t; t_\ell - t_m > 0; \forall \underset{\ell}{x} \xrightarrow{\quad} \underset{m}{\quad}, \text{ ligne de l'arbre } t_\beta\} \in \mathbb{R}_t^n.$$

Le cône $\tilde{c}_\beta$ dual de c_β est un cône simplicial de P_s^{n-1} défini par la règle suivante : chacune des $n-1$ lignes $\underset{\ell}{x} \xrightarrow{\quad} \underset{m}{\quad}$ de l'arbre t_β détermine une partition de l'ensemble des sommets $\{1, 2, \dots, n\}$ de t_β en deux sous-ensembles $I_{\ell m}$ et $J_{\ell m}$ tels que $\underset{\ell}{x} \in I_{\ell m}$, $\underset{m}{\quad} \in J_{\ell m}$. $\tilde{c}_\beta$ est défini par l'ensemble des $n-1$ inégalités correspondantes soit :

$$\left\{ s; \sum_{i \in I_{\ell m}} s_i = - \sum_{j \in J_{\ell m}} s_j > 0, \forall \underset{\ell}{x} \xrightarrow{\quad} \underset{m}{\quad} \right\}.$$

On vérifie aisément que chaque cône $\pi_{I^+I^-}^{(n)}$ contient tous les cônes $\tilde{c}_\beta$ associés aux arbres $t_\beta \in T_{I^+I^-}^{(n)}$.

3°) A tout monôme emboité $\mu_\alpha \in \mathcal{D}_{I^+I^-}^{(n)}$, on associe les cônes :

$$\sigma_\alpha = \bigcup_{\beta; k_{\alpha\beta}=1} c_\beta \in \mathbb{R}_t^n$$

$$\text{et } \tilde{\sigma}_\alpha = \bigcap_{\beta; k_{\alpha\beta}=1} \tilde{c}_\beta \in P_s^{n-1},$$

les nombres $k_{\alpha\beta}$ étant ceux définis par la formule (14).

4°) Définition : on appelle cellule de l'espace $P_s^{(n-1)}$ tout cône de

sommet l'origine défini en se donnant pour tout sous-ensemble I de $\{1, 2, \dots, n\}$ une inégalité du type :

$$\sum_{i \in I} s_i = - \sum_{j \in \complement I} s_j > 0 \quad \text{ou} < 0 ,$$

de façon que l'ensemble de ces inégalités soient compatibles (*). Deux cellules sont dites adjacentes, si on passe de l'une à l'autre en changeant le signe d'une seule inégalité.

On peut alors résumer dans le petit lemme suivant les propriétés des cônes $\tilde{\sigma}_\alpha$:

lemme

1°) Pour tout monôme emboîté $\mu_\alpha = [A_{i_1} \updownarrow, [\dots [A_{i_{n-1}} \downarrow, A_{i_n} \uparrow] \dots]] \in \mathcal{D}_{I^+ I^-}^{(n)}$,

le cône $\tilde{\sigma}_\alpha$ associé est simplicial, et défini par les $(n-1)$ inégalités suivantes :

$$\left[\begin{array}{l} s_i + \sum_{j \in J_1 \cap I^-} s_j > 0 \quad \forall i \in I^+ ; i \neq i_n \\ s_i + \sum_{j \in J_1 \cap I^+} s_j < 0 \quad \forall i \in I^- \end{array} \right. ,$$

où J_1 désigne l'ensemble des indices entiers apparaissant à gauche de l'indice i dans l'expression de μ_α .

(*) Ces cônes ont été introduits par D. Ruelle (cf.(3)).

2°) $\tilde{\sigma}_\alpha$ est une cellule de $P_s^{(n-1)}$, contenue dans le cône $\pi_{I^+I^-}^{(n)}$.

3°) Etant donné un arbre quelconque $t_\beta \in T_{I^+I^-}^{(n)}$, on a :

$$\left[\begin{array}{l} \tilde{\sigma}_\alpha \subset \tilde{c}_\beta \text{ si } k_{\alpha\beta} = 1 \\ \tilde{\sigma}_\alpha \cap \tilde{c}_\beta = \emptyset \text{ si } k_{\alpha\beta} = 0 \end{array} \right.$$

L'exemple suivant montre que pour $n \geq 5$, l'ensemble des cônes $\tilde{\sigma}_\alpha$ n'est qu'un sous-ensemble strict de l'ensemble des cellules ; le cône

$$\gamma = \left\{ s ; \sum_{i=1}^5 s_i = 0 ; \begin{array}{l} s_1+s_4 > 0, s_2+s_4 > 0, s_3+s_4 > 0 \\ s_1+s_5 > 0, s_2+s_5 > 0, s_3+s_5 > 0 \end{array} \right\}$$

est une cellule, mais ne peut être un cône $\tilde{\sigma}_\alpha$, n'étant pas simplicial.

Dans la suite, une cellule quelconque de $P_s^{(n-1)}$ sera notée γ_λ , l'indice λ désigne une certaine fonction $\lambda(I)$ définie sur l'ensemble des sous-ensembles de $\{1, 2, \dots, n\}$, et à valeur dans $\{+1, -1\}$ de telle sorte que l'on ait :

$$\gamma_\lambda = \left\{ s ; \sum_{j=1}^n s_j = 0 ; \forall I, \lambda(I) \times \sum_{i \in I} s_i > 0 \right\}.$$

On se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème IV.2.

1°) A toute cellule γ_λ de l'espace P_s^{n-1} contenue dans un cône $\pi_{I^+I^-}^{(n)}$, on peut associer un élément unique r_λ de l'algèbre de Lie $\mathcal{D}_{I^+I^-}^{(n)}(r_\lambda \in \mathcal{D}_{I^+I^-}^{(n)})$, tel que :

$$\ell(r_\lambda) = \sum_{\beta} k_{\lambda\beta} t_{\beta} \in \Delta_{I^+I^-}^{(n)}, \quad (16)$$

où la sommation s'étend à tous les arbres $t_{\beta} \in T_{I^+I^-}^{(n)}$, et où $k_{\lambda\beta} = 0$ si

$$\gamma_\lambda \cap \tilde{c}_{\beta} = \emptyset \quad ; \quad k_{\lambda\beta} = 1 \text{ si } \gamma_\lambda \subset \tilde{c}_{\beta}.$$

2°) Pour tout couple de cellules adjacentes $\gamma_{\lambda_1}, \gamma_{\lambda_2}$, auxquelles correspondent deux éléments $r_{\lambda_1}, r_{\lambda_2} \in \mathcal{D}_{I^+I^-}^{(n)}$, il existe deux éléments de degrés inférieurs à n , $r_{\lambda'} \in \mathcal{D}^{(p)}, r_{\lambda''} \in \mathcal{D}^{(n-p)}$, ($1 \leq p < n$), tels que dans $\mathcal{D}$, on ait l'égalité :

$$r_{\lambda_1} - r_{\lambda_2} = [r_{\lambda'}, r_{\lambda''}]. \quad (17)$$

Démonstration :

Soient deux cellules adjacentes $\gamma_{\lambda_1}, \gamma_{\lambda_2}$; leur face commune ϕ appartient à un certain hyperplan H_p d'équation :

$$s_{i_1} + \dots + s_{i_p} = -(s_{i_{p+1}} + \dots + s_{i_n}) = 0,$$

qui s'identifie à un produit $P^{(p-1)}_{(s_{i_1} \dots s_{i_p})} \times P^{n-p-1}_{(s_{i_{p+1}} \dots s_{i_n})}$. Dans H_p il

existe un seul cône produit $\gamma_{\lambda'} \times \gamma_{\lambda''}$ tel que $\gamma_{\lambda'}$ et $\gamma_{\lambda''}$ soient des cellules,

respectivement dans P^{p-1} et P^{n-p-1} , et que φ soit contenue dans $\gamma_{\lambda'} \times \gamma_{\lambda''}$.
 (Il suffit pour le définir, de conserver parmi les inégalités qui définissent γ_{λ_1} et γ_{λ_2} celles qui portent uniquement sur les variables de l'un ou de l'autre des ensembles $\{i_1 \dots i_p\}$, $\{i_{p+1} \dots i_n\}$). A $\gamma_{\lambda'}$ et $\gamma_{\lambda''}$, associons respectivement les éléments $\rho_{\lambda'} = \sum_{\beta'} k_{\lambda'\beta'} t_{\beta'} \in \Delta^{(p)}$ et

$$\rho_{\lambda''} = \sum_{\beta''} k_{\lambda''\beta''} t_{\beta''} \in \Delta^{(n-p)},$$

selon la définition (16) donnée dans l'énoncé du théorème. Formons dans Δ , le produit de Lie :

$$[\rho_{\lambda'}, \rho_{\lambda''}] = \sum_{\beta' \beta''} k_{\lambda'\beta'} k_{\lambda''\beta''} [t_{\beta'}, t_{\beta''}] . \quad (18)$$

D'après la définition du produit de Lie de deux arbres, chaque crochet du deuxième membre s'écrit :

$$[t_{\beta'}, t_{\beta''}] = \sum_{\beta_1} t_{\beta_1} - \sum_{\beta_2} t_{\beta_2} ; \text{ dans cette expression, tous}$$

les arbres t_{β_1} (resp. t_{β_2}) ont un cône associé $\tilde{c}_{\beta_1}$ (resp. $\tilde{c}_{\beta_2}$) admettant pour face dans l'hyperplan H_p le cône produit $\tilde{c}_{\beta'} \times \tilde{c}_{\beta''}$ (où $\tilde{c}_{\beta'}$ et $\tilde{c}_{\beta''}$ sont respectivement associés à $t_{\beta'}$ et $t_{\beta''}$ dans P^{p-1} et P^{n-p-1}). Comme $\gamma_{\lambda'} \subset \tilde{c}_{\beta'}$ et $\gamma_{\lambda''} \subset \tilde{c}_{\beta''}$, on a :

$$\varphi \subset \gamma_{\lambda'} \times \gamma_{\lambda''} \subset \tilde{c}_{\beta'} \times \tilde{c}_{\beta''} ;$$

comme de plus tous les cônes $\tilde{c}_{\beta_1}$ sont d'un certain côté de H_p et tous les cônes

$\tilde{c}_{\beta_2}$ de l'autre côté de H_p , on a (pour un choix convenable des notations) :

$$\forall \beta_1 \quad \tilde{c}_{\beta_1} \supset \gamma_{\lambda_1}$$

$$\forall \beta_2 \quad \tilde{c}_{\beta_2} \supset \gamma_{\lambda_2} .$$

De plus ces cônes sont les seuls à contenir γ_{λ_1} ou γ_{λ_2} et à avoir une face dans H_p . Par suite, si l'on forme :

$$\rho_1 - \rho_2 = \sum_{\beta_1^*} k_{\lambda_1 \beta_1^*} t_{\beta_1^*} - \sum_{\beta_2^*} k_{\lambda_2 \beta_2^*} t_{\beta_2^*}$$

selon la définition de l'énoncé, on est sûr d'obtenir tous les termes apparaissant dans le développement de la formule (18) et avec le même signe. En outre, tous les arbres t_β dont les cônes $\tilde{c}_\beta$ correspondant n'ont pas de face dans H_p apparaissent avec le même coefficient dans $\sum_{\beta_1^*}$ et $\sum_{\beta_2^*}$; en effet si un tel cône contient γ_{λ_1} ,

il contient nécessairement γ_{λ_2} . Ainsi, on a montré la relation suivante dans Λ :

$$\rho_{\lambda_1} - \rho_{\lambda_2} = [\rho_{\lambda^*}, \rho_{\lambda^{**}}] . \quad (19)$$

Si on suppose que $\forall p < n$, et $\forall \lambda$, l'élément ρ_λ appartient à $\ell(\mathcal{D})$, on voit que :

$$\rho_{\lambda_1} \in \ell(\mathcal{D}) \Rightarrow \rho_{\lambda_2} \in \ell(\mathcal{D}) .$$

Comme la propriété est vraie, d'après le lemme ci-dessus, pour tous les $\rho_\alpha = \ell(\mu_\alpha)$

(où μ_α est un monôme emboîté quelconque), et que l'on passe d'une cellule $\tilde{\sigma}_\alpha$ à une cellule γ_λ quelconque en traversant un nombre fini de faces, on a établi que :

$$\forall \lambda, \rho_\lambda \in \ell(\mathcal{D}).$$

Comme ℓ est injective, il existe quel que soit λ un élément unique $r_\lambda = \ell^{-1}(\rho_\lambda)$ de $\mathcal{D}$ tel que la formule (16) soit vérifiée.

La deuxième partie du théorème s'obtient immédiatement en transportant la formule (19) par l'homomorphisme ℓ^{-1} .

Remarque : Il résulte de la démonstration précédente qu'il existe toujours au moins un cône $\tilde{c}_\beta$ contenant une cellule donnée γ_λ ; s'il n'en était pas ainsi, on aurait $\rho_\lambda = 0$ quel que soit λ , ce qui est absurde puisque $\rho_\alpha = \ell(m_\alpha) \neq 0$. Ceci montre du même coup que $\forall \lambda, \gamma_\lambda$ est exactement l'intersection de tous les cônes $\tilde{c}_\beta$ qui le contiennent, car toute face φ de γ_λ est alors contenue dans au moins un cône produit $\tilde{c}_{\beta_1} \times \tilde{c}_{\beta_2}$ et la construction ci-dessus permet d'associer à ce produit un ensemble de cônes $\tilde{c}_\beta$ contenant γ_λ et dont la frontière contient φ .

V - PROPRIETES DE SUPPORT DES O R G RESULTANT DE LA CAUSALITE

On s'intéresse dans ce chapitre aux propriétés de support des O R G $m_\alpha(x_1, \dots, x_n)$ définis à la fin du chapitre III. Ces O R G sont des champs d'opérateurs définis sur un espace $\mathbb{R}^{4n}$ que nous noterons $\mathbb{R}_x^{4n}$ pour rappeler qu'il s'agit du produit tensoriel de l'espace des positions $\mathbb{R}_x^4$ par un espace $\mathbb{R}^n$. En identifiant cet espace $\mathbb{R}^n$ à l'espace $\mathbb{R}_t^n$ du chapitre précédent, on peut associer à tous les cônes $\sigma_\alpha, c_\beta \subset \mathbb{R}_t^n$ respectivement les cônes

$$\Sigma_\alpha = v^+ \otimes \sigma_\alpha, c_\beta = v^+ \otimes c_\beta \subset \mathbb{R}_x^{4n}.$$

On se propose de montrer le théorème suivant :

Théorème V.1 :

Tout O R G de Steinmann $m_\alpha(x_1, \dots, x_n) = h \circ i_n(\mu_\alpha)$ a pour support, dans $\mathbb{R}_x^{4n}$, le cône $\Sigma_\alpha = \bigcup_{\beta; k_{\alpha\beta}=1} C_\beta$.

Définitions : Pour tout point $x \in \mathbb{R}_x^4$, on désigne par $\mathcal{A}_x$ le quotient de l'algèbre $\mathcal{A}$ par l'ensemble des relations $\{\theta_{ij} = 0; \theta_{kl} = e\}$ en correspondance biunivoque avec l'ensemble des identités $\{\theta_{ij}(x) = 0; \theta_{kl}(x) = 1\}$ vérifiées par le point x . L'image dans $\mathcal{A}_x$ d'un monôme de flèches $m_\alpha \in \mathcal{A}$ sera notée $m_{\alpha,x}$. En outre on appelle J_x l'idéal de $\mathcal{A}_x$ engendré par tous les éléments $[A_i, A_j]$ tels que $(x_i - x_j)^2 < 0$.

On va d'abord établir le lemme suivant :

Lemme . Pour tout point $x \in \bigcap \Sigma_\alpha$ et tout monôme de flèches m_α , on a : $m_{\alpha,x} \in J_x$.

La démonstration se fait par récurrence sur l'ordre n de m_α .

a) Si $n = 2$, il suffit de considérer $m_\alpha = \theta_{12}[A_1, A_2]$ et il est trivial que $m_{\alpha,x} \in J_x$ ($m_{\alpha,x} = 0$ si $x_1^0 - x_2^0 < 0$; $m_{\alpha,x} = [A_1, A_2]$ si $(x_1 - x_2)^2 < 0$ et $x_1^0 - x_2^0 \geq 0$).

b) Supposons la propriété vraie à l'ordre $n - 1$, et écrivons $m_\alpha = A_n \uparrow m'_\alpha$ (le cas $A_n \downarrow m'_\alpha$ serait analogue). En se reportant à la définition de Σ_α , on voit que :

$$C_{\Sigma_\alpha} = C_{\Sigma'_\alpha} \bigcup \left\{ x; x_n - x_1 \in \bar{V}^+; \forall i, 1 \leq i \leq n-1 \right\}.$$

- Si $x_n - x_1 \in \mathcal{C} \bar{V}^+$ quel que soit i ($1 \leq i \leq n-1$), on utilise le fait que m_α appartient à l'idéal engendré par tous les éléments $\theta_{ni} [A_n, A_i]$ (ceci résulte de la définition de la dérivation $A_n \uparrow$). Or au point x , θ_{ni} n'est différent de zéro que si $(x_n - x_i)^2 < 0$, donc $m_{\alpha, x} \in J_x$.

- Si $x \in \mathcal{C} \Sigma'_\alpha$, $m'_{\alpha, x}$ appartient d'après l'hypothèse de récurrence à l'idéal engendré par tous les éléments $[A_i, A_j]$ tels que $1 \leq i, j \leq n-1$ et $(x_i - x_j)^2 < 0$. Il suffit donc de considérer l'action de $A_n \uparrow$ sur un monôme quelconque d'ordre $n-1$ contenant en facteur un tel élément $[A_i, A_j]$. On obtient ainsi des termes contenant en facteur $[A_i, A_j]$ plus un terme contenant en facteur l'élément

$$A_n \uparrow [A_i, A_j] = \theta_{ni} [A_n, A_i], A_j + \theta_{nj} A_i, [A_n, A_j] . \quad (20)$$

Deux cas sont possibles :

. $(x_i - x_n)^2 > 0$ et $(x_j - x_n)^2 > 0$, alors nécessairement $\theta_{ni} = \theta_{nj}$ et d'après l'identité de Jacobi, le second membre de la formule (20) s'écrit :

$$\theta_{ni} [A_i, A_j], A_n \in J_x ;$$

. $(x_i - x_n)^2 < 0$ (ou de même $(x_j - x_n)^2 < 0$), alors le second membre de la formule (20) s'écrit :

$$(\theta_{ni} - \theta_{nj}) [A_n, A_i], A_j + \theta_{nj} A_n, [A_i, A_j] \in J_x ;$$

ceci achève la démonstration du lemme.

Le théorème V.1 est alors un corollaire immédiat de ce lemme et de l'axiome de causalité (1er axiome énoncé au chapitre II).

Nous énoncerons sans démonstration (celle-ci étant trop longue pour avoir sa place dans cet exposé [4]) le théorème suivant qui est une version améliorée du corollaire du théorème IV.1.

Théorème V.2 : A tout arbre $t_\beta \in T_{I+I}^{(n)}$, on peut associer un champ d'opérateurs $F_\beta(x_1, \dots, x_n)$ sur $\mathbb{R}_x^{4n}$ ayant pour support le cône C_β , de telle sorte que pour tout monôme m_α , on ait : $m_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \sum_\beta k_{\alpha\beta} F_\beta(x_1, \dots, x_n)$, (21) et que les relations de Steinmann reliant les O R G $m_\alpha(x)$ soient identiquement satisfaites par les seconds membres des équations (21).

(22)

Considérons alors l'ensemble des champs d'opérateur $r_\lambda(x_1 \dots x_n) = \sum_\beta k_{\alpha\beta} F_\beta(x_1 \dots x_n)$ où la définition des coefficients $k_{\alpha\beta}$ est celle du théorème IV.2. Comme tout $F_\beta(x_1 \dots x_n)$ est l'image de l'arbre t_β par l'extension à T de l'homomorphisme de modules $h \circ i_n \circ \ell^{-1}$ (cf. corollaire du théorème IV.1), il est clair que :

$$r_\lambda(x_1 \dots x_n) = h \circ i_n \circ \ell^{-1}(\rho_\lambda) = h \circ i_n(r_\lambda), \text{ où } r_\lambda \in \mathcal{D}.$$

Or $h \circ i_n$ peut aussi être considéré comme un homomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathcal{D}$ dans l'algèbre de Lie associée à l'algèbre tensorielle $\mathcal{O}$. Par suite les relations (17) établies par le théorème IV.2 se transportent dans $\mathcal{O}$, c'est-à-dire que pour tout couple d'indice λ_1, λ_2 correspondant à des cellules adjacentes $\gamma_{\lambda_1}, \gamma_{\lambda_2}$, on a une relation de la forme :

$$r_{\lambda_1}(x_1 \dots x_n) - r_{\lambda_2}(x_1 \dots x_n) = \left[r_{\lambda_1}(x_1, \dots, x_m), r_{\lambda_2}(x_{m+1}, \dots, x_n) \right]. \quad (23)$$

De plus tous les $r_\lambda(x_1 \dots x_n)$ sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des $m_\alpha(x_1 \dots x_n)$ puisque les monômes emboîtés μ_α de l'algèbre de Lie $\mathcal{D}$ engendrent linéairement toute cette algèbre et en particulier les éléments r_λ . Ils sont donc bien intrinsèquement définis, indépendamment de la détermination, des $F_\beta(x_1 \dots x_n)$.

Les $r_\lambda(x_1 \dots x_n)$ sont tous les opérateurs retardés généralisés* que l'on peut introduire dans la théorie ; Les O R G de Steinmann $m_\alpha(x_1 \dots x_n)$ n'en constituent qu'un sous-ensemble correspondant à des éléments particulièrement simples de l'algèbre $\mathcal{D}$, à savoir les monômes emboîtés. (C'est seulement à partir de $n=5$ qu'il existe des r_λ qui ne sont pas des m_α). Dans le chapitre suivant nous considérerons les "fonctions retardées généralisées" (F R G) correspondantes, c'est-à-dire les éléments de matrice $\langle \Omega, r_\lambda(x_1 \dots x_n) \Omega \rangle$ (notés aussi $\langle r_\lambda(x_1 \dots x_n) \rangle$). D'après la fin du chapitre III, toutes ces fonctions ne dépendent en fait que des différences $(x_i - x_j)$, et on peut également déterminer les fonctions $\langle F_\beta(x_1 \dots x_n) \rangle$ de façon qu'elles ne dépendent que des différences $(x_i - x_j)$, tous les supports Σ_α et C_β étant invariants par les translations $\{x_i \rightarrow x_i + a\}$.

(*) Tous ces O R G ont été introduits par Ruelle (3) par un procédé différent.

VI - UN PROBLEME DE VALEURS AU BORD DANS L'ESPACE DES IMPULSIONS

a) Géométrie de l'espace des impulsions :

A toutes les notions introduites au chapitre IV, en ce qui concerne l'espace $\mathbb{R}_s^n$, on peut faire correspondre les notions suivantes relatives à l'espace $\mathbb{R}_p^{4n}$ de n quadrivecteurs p_i représentant les variables d'impulsion :

$$\left(\mathbb{R}_p^{4n} = \mathbb{R}_s^n \otimes \mathbb{R}_p^4 \right) .$$

Tous les cônes $\tilde{\sigma}_\alpha, \pi_{I^+I^-}^{(n)}, \tilde{c}_\beta, \gamma_\lambda$ étant définis dans le plan P_s^{n-1}

par des ensembles d'inégalités du type (24) $s_{i_1} + s_{i_2} + \dots + s_{i_m} > 0$ ou < 0 , on leur associe dans le plan $P^{4(n-1)}$ d'équation ;

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 0 ,$$

les cônes $\sum_\alpha \tilde{\sigma}_\alpha, \prod_{I^+I^-}^{(n)}, \tilde{c}_\beta, \gamma_\lambda$ obtenus en remplaçant chacune des inégalités (24) par l'inclusion correspondante :

$$p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_m} \in V^+ \text{ ou } V^- .$$

Dans chacun des grand cônes $\prod_{I^+I^-}^{(n)} = \left\{ p ; \sum_{k=1}^n p_k = 0 ; \dots \right.$

$$\left. \dots p_i \in V^+, i \in I^+ ; p_j \in V^-, j \in I^- \right\}$$

sont contenus tous les cônes $\tilde{c}_\beta$ relatifs à tous les arbres t_β de l'ensemble $T_{I^+I^-}^{(n)}$. Chacune des "cellules" γ_λ contenues dans $\prod_{I^+I^-}^{(n)}$ est l'intersection de

tous les cônes $\tilde{C}_\beta \subset \prod_{I^+ I^-}^{(n)}$ qui la contiennent (ceci résulte de la remarque faite à la fin du chapitre IV).

b) Analyticité des F.R.G. dans des tubes.

On considère l'ensemble des F.R.G. $\langle r_\lambda(x_1 \dots x_n) \rangle$ d'un ordre donné n quelconque ; nous supposons que ces fonctions sont continues et à croissance lente ; à cause de l'invariance de ces fonctions par les translations $\{x_1 \rightarrow x_1 + a\}$, leurs transformées de Fourier sont de la forme $\delta(p_1 + \dots + p_n) \langle \tilde{r}_\lambda(\hat{p}) \rangle$.

De même les transformées de Fourier des $\langle F_\beta(x_1 \dots x_n) \rangle$ sont de la forme $\delta(p_1 + \dots + p_n) \langle \tilde{F}_\beta(\hat{p}) \rangle$; dans cette notation, $\hat{p}$ désigne un point du plan $P_p^{4(n-1)}$.

D'après un théorème bien connu (*) sur les transformées de Laplace de distributions tempérées à support dans un cône, on voit que toutes les distributions $\langle \tilde{F}_\beta(\hat{p}) \rangle$ sont des valeurs au bord de fonctions analytiques notées $\langle \tilde{F}_\beta(\hat{k}) \rangle$, ($\hat{k}$) désignant un point du plan $P_p^{4(n-1)}$ complexifié). Chaque fonction $\langle \tilde{F}_\beta(\hat{k}) \rangle$ est analytique dans le tube ;

$$\left\{ k = (k_1 \dots k_n) ; k_1 = p_1 + iq_1 ; \sum_{j=1}^n k_j = 0 ; (q_1 \dots q_n) \in \tilde{C}_\beta \right\},$$

la base de ce tube étant en effet le cône dual de C_β par rapport à la forme bilinéaire $\sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i$.

(*) Pour des références plus précises concernant les origines de ce théorème on pourra se reporter au livre de Streater et Wightman (réf. A) où l'on trouvera plusieurs versions dudit théorème.

En récrivant la formule (22) pour les transformées de Fourier des F.R.G. correspondantes, soit :

$$\langle r_{\lambda}(\hat{p}) \rangle = \sum_{\beta} k_{\alpha\beta} \langle F_{\beta}(\hat{p}) \rangle ,$$

on voit immédiatement que tout $\langle r_{\lambda}(\hat{p}) \rangle$ est la valeur au bord d'une fonction $\langle r_{\lambda}(\hat{k}) \rangle$, analytique dans le tube :

$$\tau_{\lambda} = \left\{ \hat{k} = \hat{p} + i\hat{q} ; \hat{q} \in \Gamma_{\lambda} \right\} , \quad \Gamma_{\lambda} = \bigcap_{\beta; k_{\lambda\beta}=1} C_{\beta} .$$

En particulier, chaque F.R.G. de Steinmann $\langle m_{\alpha}(\hat{p}) \rangle$ est la valeur au bord d'une fonction analytique dans le tube de base $\sum_{\alpha}$, les $\sum_{\alpha}$ constituant un sous-ensemble de l'ensemble des cellules Γ_{λ} ; mais ce résultat concernant les $\langle m_{\alpha}(\hat{p}) \rangle$ pouvait s'obtenir directement par dualité à partir des propriétés de support démontrées au chapitre précédent, c'est-à-dire indépendamment du théorème V.2. En résumé, l'intérêt de l'introduction de l'algèbre des arbres et du théorème V.2. est d'avoir permis la résolution du problème de valeurs au bord suivant :

Théorème VI.1.

Etant donné un ensemble de fonctions $\langle m_{\alpha}(\hat{k}) \rangle$ analytiques dans les tubes de bases $\sum_{\alpha}$, dont les valeurs au bord $\langle m_{\alpha}(\hat{p}) \rangle$ satisfont sur tous les réels à un certain système de relations linéaires (relations de Steinmann), il existe des fonctions $\langle f_{\beta}(\hat{k}) \rangle$ analytiques dans les tubes de bases $\tilde{C}_{\beta}$ telles que :

$$\langle m_{\alpha}(\hat{k}) \rangle = \sum_{\beta} k_{\alpha\beta} \langle f_{\beta}(\hat{k}) \rangle , \quad (25)$$

où :

$$k_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{si} \quad \tilde{C}_{\beta} \cap \sum_{\alpha} = \emptyset ,$$

$$k_{\alpha\beta} = 1 \quad \text{si} \quad \sum_{\alpha} \subset \tilde{C}_{\beta} ;$$

et les expressions (25) résolvent les relations de Steinmann. De plus pour toute cellule Γ_λ , on peut définir une fonction $\langle r_\lambda(\hat{k}) \rangle$ analytique dans le tube de base Γ_λ par la formule :

$$\langle r_\lambda(\hat{k}) \rangle = \sum_{\lambda} k_{\lambda\beta} \langle f_\beta(\hat{k}) \rangle$$

$$(\text{où } k_{\lambda\beta} = 0 \quad \text{si } \tilde{C}_\beta \cap \Gamma_\lambda = \emptyset ;$$

$$k_{\lambda\beta} = 1 \quad \text{si } \Gamma_\lambda \subset \tilde{C}_\beta) ;$$

la valeur au bord sur les réels de $\langle r_\lambda(\hat{k}) \rangle$ étant une combinaison linéaire bien définie (à coefficients entiers) des $\langle m_\alpha(\hat{p}) \rangle$.

c) La fonction de n points.

L'introduction du 3ème axiome physique (condition spectrale) ajoute de nouvelles conditions sur les valeurs au bord $\langle r_\lambda(\hat{p}) \rangle$ qui jusqu'à présent n'ont pu être exploitées que très partiellement :

On a le théorème suivant :

Théorème VI - 2.

Pour tout couple de cellules adjacentes Γ_{λ_1} , Γ_{λ_2} dont la face commune est dans le plan d'équation $p_{1_1} + \dots + p_{1_m} = 0$, les valeurs au bord correspondantes $\langle r_{\lambda_1}(\hat{p}) \rangle$, $\langle r_{\lambda_2}(\hat{p}) \rangle$ coïncident (en tant que distributions) sur un ouvert de la forme $\mathcal{R}_{1_1 \dots 1_m} \{ \hat{p} ; (p_{1_1} + \dots + p_{1_m})^2 = (p_{1_{m+1}} + \dots + p_{1_n})^2 < M^2 \} .$

Démonstration : Utilisant la relation (23), on obtient :

$$\langle r_{\lambda_1}(\hat{p}) \rangle - \langle r_{\lambda_2}(\hat{p}) \rangle = \int e^{i \sum_{j=1}^{1n} p_j \cdot x_j} \langle \Omega, [r_{\lambda_1}(x_{1_1} \dots x_{1_m}), r_{\lambda_2}(x_{1_{m+1}} \dots x_{1_n})] \Omega \rangle d_4 x_1 \dots d_4 x_n.$$

Sachant que les $r_{\lambda}(x_1 \dots x_n)$ sont des combinaisons linéaires (à coefficients θ_{ij}) de monômes $A(x_{1_1}) \dots A(x_{1_n})$, il suffit de montrer que la distribution à valeurs vectorielles dans $\mathcal{H}$:

$$\Phi(p_{1_1} \dots p_{1_m}) = \int A(x_{1_1}) \dots A(x_{1_m}) \Omega \rangle e^{i \sum_{j=1}^{1m} p_j \cdot x_j} d_4 x_{1_1} \dots d_4 x_{1_m}$$

a son support contenu dans $\{p ; p_{1_1} + \dots + p_{1_m} \in \overline{V}_M^+\}$ où :

$$\overline{V}_M^+ = \{p \in R^4 ; p^2 \geq M^2, p^{(0)} \geq 0\}.$$

Pour la démonstration de cette propriété classique, conséquence des 2ème, 3ème (*) et 4ème axiomes exposés au chapitre II, nous renvoyons le lecteur au livre de R. Jost (cf. Ref.B) page 58.

(*) L'hypothèse spectrale que nous avons faite dans le 3ème axiome permet seulement de démontrer que le support est contenu dans $\overline{V}^+$; c'est une hypothèse un peu plus détaillée sur le spectre d'énergie qui permet d'obtenir la région $\overline{V}_M^+$.

En appliquant alors le théorème de l'"edge of the wedge" de H. Epstein (cf. (5)), à n'importe quel couple de fonctions $\langle r_{\lambda}(k) \rangle$ analytiques dans des cellules adjacentes on obtient la propriété suivante :

Théorème VI.3

Il existe une fonction $H^n(\hat{k})$ analytique dans le domaine suivant de l'espace $P_p^{4(n-1)}$ complexifié :

$$\bigcup_{\lambda} \mathcal{C}_{\lambda} \quad \bigcup_{\substack{(i_1 \dots i_m) \\ (\lambda_1 \lambda_2)}} \mathcal{V}_{\lambda_1 \lambda_2}(\mathcal{R}_{i_1 \dots i_m})$$

où $\mathcal{V}_{\lambda_1 \lambda_2}(\mathcal{R}_{i_1 \dots i_m})$ est l'intersection d'un voisinage complexe de la région $\mathcal{R}_{i_1 \dots i_m}$ avec l'enveloppe convexe de l'union des tubes $\mathcal{C}_{\lambda_1}$ et $\mathcal{C}_{\lambda_2}$.

Comme le domaine énoncé dans ce théorème n'est pas un domaine naturel, on se trouve devant un problème extrêmement complexe d'enveloppe d'holomorphie, dont quelques étapes seulement ont pu être franchies jusqu'à présent.

D'autre part la superposition des conditions du théorème VI.2 à la structure algébrique décrite par le théorème VI.1 pose un nouveau problème de valeurs au bord dont une étape préliminaire a pu être résolue par R. Stora (cf. (g)). La difficulté de ce nouveau problème de valeurs au bord est liée au caractère suivant : les relations linéaires entre les valeurs au bord imposées par le théorème VI.2 n'ont pas lieu sur tous les réels, mais sur des régions $\mathcal{R}_{i_1 \dots i_m}$, par suite ces relations ne peuvent s'exprimer simplement dans l'espace $\mathbb{R}_x^{4n}$ des transformées de Fourier inverses. C'est en effet dans cet espace, et grâce aux propriétés de support (et non d'analyticité) qu'on avait pu résoudre le premier problème de valeurs au bord résumé dans le théorème VI.1.

d) Relation avec les amplitudes de diffusion de particules élémentaires

Pour terminer et en vue de satisfaire le lecteur mathématicien s'il arrive jusqu'ici, nous désirons indiquer sans démonstration le lien qui existe entre les amplitudes de diffusion (qui sont actuellement les quantités physiquement mesurables) et les objets algébriques que nous venons de définir.

On démontre la propriété suivante :

Soit une amplitude de diffusion $F(p_I \dots p_n)$ où interviennent les particules entrantes $a_I, \dots, a_m$ d'impulsions respectives $p_I, \dots, p_m$ et les particules sortantes d'impulsions respectives $p_{m+1} \dots p_n$; $p_I, \dots, p_n$ sont des quadrivecteurs appartenant au cône V^+ et satisfaisant de plus à une condition de masse $p_1^2 = m_1^2$.

Soit $\hat{\Gamma}_\lambda$ la région déduite de Γ_λ en remplaçant toutes les conditions $p_{1_I} \dots + p_{1_m} \in V^\pm$ par $p_{1_I} + \dots + p_{1_m} \in C V^+ (\Gamma_\lambda \supset \hat{\Gamma}_\lambda)$.

Alors $\forall \Gamma_\lambda \subset \prod_{\{1 \dots m\} \{m+1 \dots n\}}^n$, on a la relation suivante :

$$F(p_I \dots p_m ; p_{m+1} \dots p_n) = \prod_{i=1}^n (p_i^2 - m_i^2) \langle r_\lambda(p_1 \dots p_m, -p_{m+1} \dots -p_n) \rangle \dots$$

$$\dots |_{p_1^2 = m_1^2}$$

valable dans la région :

$$\left\{ p ; p_1 \in V^+ ; p_1^2 = m_1^2 ; 1 < i < n ; (p_I \dots p_m, -p_{m+1} \dots -p_n) \in \hat{\Gamma}_\lambda \right\}.$$

Ceci suppose évidemment que l'on ait montré que la restriction de la distribution $\prod (p_i^2 - m_i^2) \langle r_\lambda(\beta) \rangle$ à la variété $\{p_1^2 = m_1^2\}$ appelée "couche de masse", ait

un sens (*). Ceci a été montré par K. Hepp (cf.(7)) avec une définition convenablement régularisée des F.R.G.

Comme annoncé dans l'introduction, on voit maintenant plus clairement en quel sens différentes amplitudes de diffusion correspondant à un même ensemble de n particules, mais où l'on fait varier les particules entrantes et sortantes, sont des valeurs au bord de la même fonction analytique $H^{(n)}(k)$ mais prises dans des régions différentes. Cette notion (croisement) n'acquière un intérêt véritable que si elle est encore vraie pour la restriction de $H^{(n)}(k)$ à la variété "couche de masse" (considérée comme complexe c'est-à-dire $\{k ; k_1^2 = m_1^2\}$). Comme le domaine initial de $H^{(n)}(k)$ énoncé au théorème VI.3. ne rencontre pas la couche de masse, la notion de croisement (si elle est démontrable) ne peut être qu'un sous-produit du problème d'enveloppe d'holomorphe énoncé plus haut. C'est seulement dans le cas de $n=4$, qu'elle a pu être démontrée jusqu'à présent (cf.(6)) c'est-à-dire pour les amplitudes de diffusion deux particules $\rightarrow$ deux particules.

(*) Ces expressions ne sont pas nulles, car on peut montrer (7) que les $r_\lambda(p)$ ont nécessairement une singularité sur la couche de masse du type.

$$\left(\delta(p^2 - m^2) + v.p. \frac{1}{p^2 - m^2} \right) \cdot$$

BIBLIOGRAPHIE

1°) Ouvrages de référence concernant la théorie axiomatique des champs :

A - R.F. STREATER et A.S. WIGHTMAN - "P.C.T., Spin and Statistics, and all that" (Benjamin 1964).

B - R. JOST - "The general theory of quantized fields"
(publié par l' "American Mathematical Society" 1965).

2°) Publications originales :

[1] - A.S. WIGHTMAN - Phys. Rev. 101, 860 (1956)

R. HAAG - Phys. Rev. 112, 669 (1958)

H. LEHMANN, K. SYMANZIK, W. ZIMMERMANN - Nuovo Cim. 1, 205 (1954) ;
Ibid 6, 319 (1957)

V. GLASER, H. LEHMANN, W. ZIMMERMANN - Nuovo Cim. 6, 1122 (1957).

[2] - O. STEINMANN - Helv. Phys. Acta 33, 257, 347 (1960)

[3] - D. RUELLLE - Nuovo Cim. 19, 356 (1961)

[4] - J. BROS - Thèse (en préparation).

[5] - H. EPSTEIN - J. Math. Phys. 1, 524 (1960)

[6] - J. BROS, H. EPSTEIN et V. GLASER - Comm. Math. Phys. 1, 240 (1965)

[7] - K. HEPP - Comm. Math. Phys. 1, 95 (1965)

[8] - R. STORA - à paraître dans Comptes Rendus de R.C.P. n° 25 .

APPENDICE A

Le but de cet appendice est de donner les démonstrations complètes des théorèmes IV.1 et V.2 de la première partie.

Définition

$$\text{Soit } \mu_\alpha = [A_{i_1} \uparrow [A_{i_2} \uparrow \dots [A_{i_{n-1}} \downarrow, A_{i_n} \uparrow] \dots]]$$

un monôme emboîté appartenant au sous-module $\mathcal{D}_{I^+I^-}^{(n)}$ de $\mathcal{D}^{(n)}$. Nous dirons que μ_α est normal si pour tout couple de facteurs consécutifs $A_{i_p} \uparrow, A_{i_{p+1}} \uparrow$ (c'est-à-dire $i_p, i_{p+1} \in I^+$) ou $A_{i_p} \downarrow, A_{i_{p+1}} \downarrow$ (c'est-à-dire $i_p, i_{p+1} \in I^-$), on a : $i_p < i_{p+1}$.

Grâce à l'identité de Jacobi, on voit que tout monôme emboîté coïncide avec un monôme emboîté normal, obtenu en remplaçant toute suite de facteurs $A_{i_p} \uparrow, \dots, A_{i_q} \uparrow$ ou $A_{i_p} \downarrow, \dots, A_{i_q} \downarrow$ par la suite permutée des mêmes facteurs pris dans l'ordre normal.

Ces considérations sont également valables pour les monômes $A_{i_1} \uparrow A_{i_2} \uparrow \dots A_{i_{n-1}} \uparrow A_{i_n} \uparrow$ appartenant à l'algèbre associative engendrée par l'ensemble des dérivations $\{A_i \uparrow, A_i \downarrow\}$; cette algèbre Δ est le quotient de l'algèbre associative libre engendrée par $\{A_i \uparrow, A_i \downarrow, i \text{ entier } > 0\}$ par l'idéal engendré par les éléments $A_i \uparrow A_j \uparrow - A_j \uparrow A_i \uparrow$, $A_i \downarrow A_j \downarrow - A_j \downarrow A_i \downarrow$ et les éléments à répétition.

On a le lemme simple suivant

Lemme A-1 - L'ensemble des monômes $A_{i_1} \uparrow A_{i_2} \uparrow \dots A_{i_{n-1}} \uparrow A_{i_n} \uparrow$ normaux appartenant au sous-module $\Delta_{I^+I^-}^{(n)}$ de Δ forme une base de $\Delta_{I^+I^-}^{(n)}$.

Soit maintenant $\mathcal{A}(X)$ l'algèbre associative libre engendrée par les éléments d'un ensemble X et $\mathcal{L}(X)$ l'algèbre de Lie libre engendrée par X .

Lemme A-2 - Soit $\mathcal{M}_p = [-[a_1 \dots a_p] \dots]$ un monôme de $\mathcal{AL}(X)$ et b un élément quelconque de $\mathcal{AL}(X)$. On a la formule :

$$[\mathcal{M}_p, b] = \sum_{\pi} (-1)^{\sigma(\pi)} [a_{i_1} [a_{i_2} \dots [a_{i_p}, b] \dots]] ,$$

où la sommation s'étend à toutes les permutations $\pi = (i_1, \dots, i_p)$ des indices $1, 2, \dots, p$ intervenant dans le développement du monôme $\mathcal{M}_p$, identifié à son image canonique dans $\mathcal{AL}(X)$, c'est-à-dire considéré comme un commutateur multiple. Le signe $(-1)^{\sigma(\pi)}$ est le signe du terme correspondant dans ce développement de $\mathcal{M}_p$.

Démonstration : Il suffit de raisonner en termes de dérivations c'est-à-dire d'écrire $[\mathcal{M}_p, b] = \hat{\mathcal{M}}_p b$ ($\hat{\mathcal{M}}_p$ = dérivation intérieure associée à $\mathcal{M}_p$). Si $\hat{a}_1, \hat{a}_2$ sont deux dérivations intérieures de l'algèbre $\mathcal{AL}(X)$, l'identité de Jacobi montre immédiatement que $[\hat{a}_1, \hat{a}_2] = \hat{a}_1 \hat{a}_2 - \hat{a}_2 \hat{a}_1$. Plus généralement, on a par récurrence très simple :

$$\hat{\mathcal{M}}_p = \sum_{\pi} (-1)^{\sigma(\pi)} \hat{a}_{i_1} \hat{a}_{i_2} \dots \hat{a}_{i_p} ,$$

d'où résulte le lemme.

Désignons par J un ensemble quelconque de p éléments de X et par $\mathcal{AL}_J(X)$ le sous-module de $\mathcal{AL}(X)$ engendré par tous les monômes de degré p que l'on peut former avec ces p éléments, sans omission ni répétition.

Lemme A-3 - Pour tout sous-ensemble J et tout élément $a_0 \in J$, l'ensemble des monômes emboîtés formés par les p éléments de J (sans omission ni répétition) et terminés par a_0 forment une base du sous-module $\mathcal{AL}_J(X)$.

Démonstration : Montrons d'abord qu'un monôme quelconque de $\mathcal{AL}_J(X)$ est une combinaison linéaire de monômes emboîtés terminés par a_0 . Un monôme quelconque de degré p est de la forme $[A, B]$ où A et B sont des monômes de degré inférieur à p , et où B par exemple contient l'élément a_0 . Faisons l'hypothèse de récurrence que B est une combinaison linéaire de monômes emboîtés terminés par a_0 . On applique alors le lemme A-2 avec $\mathcal{M}_p = A$, $b = B$ et on obtient ainsi le résultat cherché.

Il reste à montrer que tous les monômes emboîtés terminés par a_0 sont linéairement indépendants. Considérons pour cela leurs images canoniques dans $\mathcal{A}(X)$ et supposons qu'il existe une relation linéaire :

$$\sum_{\pi} k_{i_1 \dots i_{p-1}} [a_{i_1}, [a_{i_2}, \dots [a_{i_{p-1}}, a_0] \dots]] = 0 \quad .$$

On remarque que si on développe tous les commutateurs multiples du premier membre dans $\mathcal{A}(X)$, chacun des monômes $a_{i_1} \dots a_{i_{p-1}} a_0$ n'apparaît qu'une seule fois et avec le coefficient $k_{i_1 \dots i_{p-1}}$, de sorte que tous ces coefficients sont nécessairement nuls.

Lemme A-4 - L'ensemble des monômes emboîtés normaux $\mu_{i_1 \dots i_{n-1}} = [A_{i_1} \uparrow [\dots [A_{i_{n-1}} \downarrow A_j \uparrow] \dots]]$ terminés par $A_j \uparrow$ forment une base du sous module $\mathcal{D}_{I^+ I^-}^{(n)}$ j étant un élément fixé de l'ensemble I^+ (un résultat analogue est valable avec $j \in I^-$).

Démonstration : Le fait que tout monôme $\mathcal{D}_{I^+ I^-}^{(n)}$ est une combinaison linéaire de monômes emboîtés normaux terminés par $A_j \uparrow$ se démontre comme la première partie du lemme A-3. Supposons maintenant qu'il existe une relation

$\sum_{\pi} k_{i_1 \dots i_{n-1}} \mu_{i_1 \dots i_{n-1}} = 0$, et développons tous les monômes $\mu_{i_1 \dots i_{n-1}}$ dans l'algèbre associative Δ ; on voit que chaque monôme normal $A_{i_1} \uparrow A_{i_2} \uparrow \dots A_{i_{n-1}} \downarrow A_j \uparrow$ n'apparaît qu'une seule fois et avec le coefficient $k_{i_1 \dots i_{n-1}}$; comme d'après le lemme A-1, ces monômes normaux forment une base de $\Delta_{I^+ I^-}^{(n)}$, on en déduit que tous les coefficients $k_{i_1 \dots i_{n-1}}$ sont nuls; les monômes $\mu_{i_1 \dots i_{n-1}}$ sont donc bien linéairement indépendants.

Théorème IV.1 : L'homomorphisme ℓ qui applique $\mathcal{D}$ dans l'algèbre des arbres Λ est injectif.

Nous allons montrer que pour tout n , I^+ , I^- , la restriction de ℓ au sous-module $\mathcal{D}_{I^+ I^-}^{(n)}$ est injective. Pour cela nous montrerons que l'image par ℓ d'une base de $\mathcal{D}_{I^+ I^-}^{(n)}$ est un système de vecteurs linéairement indépendants de $\Lambda_{I^+ I^-}^{(n)}$.

Soit $N_{I^+I^-}^{(n)}$ la base de $\mathcal{M}_{I^+I^-}^{(n)}$ constituée, d'après le lemme A-4, par tous les monômes emboîtés normaux μ_α terminés par un élément fixe $A_{i_0}^\uparrow$ ($i_0 \in I^+$) ou $A_{i_0}^\downarrow$ ($i_0 \in I^-$). Pour tout indice α , on pose $\mu'_\alpha = \ell(\mu_\alpha) \in \Lambda_{I^+I^-}^{(n)}$. Tout élément μ'_α admet un développement sur la base $T_{I^+I^-}^{(n)}$ de $\Lambda_{I^+I^-}^{(n)}$ de la forme suivante :

$$\mu'_\alpha = \sum_{\beta} k_{\alpha\beta} t_\beta ; \quad t_\beta \in T_{I^+I^-}^{(n)} ; \quad k_{\alpha\beta} = 0, +1 \text{ ou } -1 . \quad (A.1)$$

Définition : Nous dirons qu'un monôme $\mu_\alpha \in N_{I^+I^-}^{(n)}$ et un arbre $t_\beta \in T_{I^+I^-}^{(n)}$ sont incidents l'un à l'autre, si l'arbre t_β est affecté d'un coefficient $k_{\alpha\beta}$ non nul dans l'expression (A.1) de $\mu'_\alpha = \ell(\mu_\alpha)$.

L'indépendance linéaire du système des μ'_α va résulter du lemme suivant :

Lemme A-5 - Il existe deux fonctions à valeurs entières, l'une $\rho(\mu_\alpha)$ définie sur l'ensemble de monômes $N_{I^+I^-}^{(n)}$, et l'autre $\sigma(t_\beta)$ définie sur l'ensemble d'arbres $T_{I^+I^-}^{(n)}$, qui possèdent les propriétés suivantes :

1) - Si un monôme $\mu_\alpha \in N_{I^+I^-}^{(n)}$ et un arbre $t_\beta \in T_{I^+I^-}^{(n)}$ sont incidents l'un à l'autre alors on a l'inégalité :

$$\sigma(t_\beta) \geq \rho(\mu_\alpha) .$$

2) - Pour tout arbre t_β , il existe un monôme μ_α et un seul, incident à t_β , tel que $\sigma(t_\beta) = \rho(\mu_\alpha)$.

3) - Pour tout monôme μ_α , il existe au moins un arbre t_β , incident à μ_α , tel que $\sigma(t_\beta) = \rho(\mu_\alpha)$.

Supposons ce résultat acquis. Il s'ensuit immédiatement des parties 2) et 3) que les fonctions ρ et σ prennent leurs valeurs dans un même ensemble (fini) J d'indices entiers.

Supposons qu'il existe une relation de la forme $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \mu'_\alpha = 0$ et faisons l'hypothèse de récurrence que $\lambda_{\alpha} = 0$ pour tous les indices α tels que $\rho(\mu_\alpha) \leq \rho_0$ où $\rho_0 \in J$. On va montrer que pour tout indice donné α_0 tel que $\rho(\mu_{\alpha_0}) = \rho_0 + 1$, on a alors nécessairement $\lambda_{\alpha_0} = 0$.

Ecartons le cas trivial où $\rho_0 + 1 \notin J$; dans la construction qui suit, l'ensemble J sera d'ailleurs formé d'entiers consécutifs ; en tout cas, ce point est sans importance.

D'après les relations (A.1), on peut écrire :

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \mu'_{\alpha} = \sum_{\alpha\beta} \lambda_{\alpha} k_{\alpha\beta} t_{\beta} = 0 ,$$

soit $\forall \beta$, $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} k_{\alpha\beta} = 0$ puisque les t_{β} forment une base.

Etant donné le monôme μ_{α_0} , il existe au moins un arbre t_{β_0} incident à μ_{α_0} et tel que $\sigma(t_{\beta_0}) = \rho(\mu_{\alpha_0}) = \rho_0 + 1$; cela d'après la troisième partie du lemme. Considérons la relation :

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} k_{\alpha\beta_0} = 0 .$$

Dans la sommation sur α , seul subsiste le terme $\alpha = \alpha_0$. En effet si α est tel que $\rho(\mu_{\alpha}) \leq \rho_0$, on a $\lambda_{\alpha} = 0$ d'après l'hypothèse de récurrence ; si α est tel que $\rho(\mu_{\alpha}) > \rho_0 + 1 = \sigma(t_{\beta_0})$ on a $k_{\alpha\beta_0} = 0$ puisque d'après la première partie du lemme, μ_{α} et t_{β_0} ne peuvent être incidents l'un à l'autre ; enfin si α est tel que $\rho(\mu_{\alpha}) = \rho_0 + 1 = \sigma(t_{\beta_0})$, μ_{α} est unique d'après la deuxième partie du lemme ; c'est donc le monôme μ_{α_0} considéré .

Par suite on a : $\lambda_{\alpha_0} k_{\alpha_0\beta_0} = 0$, et comme μ_{α_0} et t_{β_0} sont incidents, $k_{\alpha_0\beta_0} \neq 0$, d'où $\lambda_{\alpha_0} = 0$.

Pour commencer la récurrence, il suffit de considérer les indices α_0 tels que $\rho(\mu_{\alpha_0})$ prenne la valeur minimale de J . Le raisonnement précédent s'applique avec la simplification suivante : comme μ_{α_0} est un élément minimal , la sommation $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} k_{\alpha\beta_0}$ se réduit à $\lambda_{\alpha_0} k_{\alpha_0\beta_0}$ sans l'aide d'hypothèse de récurrence.

L'indépendance linéaire des μ'_{α} et par suite le théorème IV.1 se trouvent donc établis à partir du lemme A-5.

Démonstration du lemme A-5

Nous supposons pour fixer les idées que tous les monômes de l'ensemble $N_{I^+I^-}^{(n)}$ ont pour élément terminal commun $A_{i_0}^\uparrow$, c'est-à-dire $i_0 \in I^+$. Soit μ_α un élément quelconque de $N_{I^+I^-}^{(n)}$:

$$\mu_\alpha = \left[A_{i_n}^\uparrow \dots \underbrace{[A^\uparrow [A^\uparrow \dots \uparrow]]}_{I_2^+} \underbrace{[A^\downarrow [A^\downarrow \dots \downarrow]]}_{I_2^-} \underbrace{[A^\uparrow [A^\uparrow \dots \uparrow]]}_{I_1^+} \underbrace{[A^\downarrow [A^\downarrow \dots \downarrow]]}_{I_1^-} [A^\downarrow, A_{i_0}^\uparrow] \dots \right]$$

μ_α est caractérisé par la donnée de sous-suites d'indices ordonnés appartenant alternativement à I^+ et à I^- ; en partant de l'élément le plus à droite $A_{i_0}^\uparrow$, on rencontre successivement vers la gauche les sous-suites $I_1^-, I_1^+, I_2^-, I_2^+ \dots, I_q^\pm$, où le dernier indice q est tel que $q \leq \nu = \min(n^+, n^-)$.

Ainsi à tout $\mu_\alpha \in N_{I^+I^-}^{(n)}$ on peut associer deux partitions ordonnées des ensembles $I^+ - \{i_0\}$ et I^- , soit :

$$\begin{cases} \bar{\omega}^+(I^+ - \{i_0\}) &= (I_1^+, I_2^+, \dots, I_\nu^+) \\ \bar{\omega}^-(I^-) &= (I_1^-, I_2^-, \dots, I_\nu^-) \end{cases},$$

ces deux partitions obéissant à la règle suivante :

Si I_j^+ est vide, alors $I_{j'}^+$, et $I_{j'}^-$, sont vides pour tout $j' > j$.

Si I_j^- est vide, alors $I_{j'}^-$, est vide $\forall j' > j$ et $I_{j'}^+$, est vide $\forall j' \geq j$.

Réciproquement à tout couple de partitions $(\bar{\omega}^+, \bar{\omega}^-)$ possédant cette propriété correspond un monôme normal unique $\mu_\alpha \in N_{I^+I^-}^{(n)}$.

Pour tout j tel que $1 \leq j \leq \nu$, soient n_j^+ et n_j^- les nombres d'éléments respectifs des ensembles I_j^+ et I_j^- (on a : $\sum_j n_j^+ = n^+$, $\sum_j n_j^- = n^-$). Posons alors pour tout $\ell \leq \nu$:

$$\rho_\ell^\pm = \sum_{1 \leq j \leq \ell} n_j^\pm ; \quad \rho^\pm = \sum_{1 \leq \ell \leq \nu} \rho_\ell^\pm ; \quad \rho = \rho^+ + \rho^- ; \quad (A.2)$$

ρ est appelé l'ordre du couple de partitions $(\bar{\omega}^+, \bar{\omega}^-)$ et définit la fonction $\rho(\mu_\alpha)$ dont il est question dans l'énoncé du lemme.

La propriété suivante se vérifie trivialement ; si on modifie la partition $\bar{\omega}^+$ (resp $\bar{\omega}^-$) en transportant un élément de I_j^+ (resp I_j^-) dans I_{j-1}^+ (resp I_{j-1}^-) la partition $\bar{\omega}^-$ (resp $\bar{\omega}^+$) restant inchangée, alors ρ augmente d'une unité.

On va maintenant associer à tout arbre $t_\beta \in T_{I^+I^-}^{(n)}$ un couple de partitions ordonnées $\{(J_1^+, J_2^+, \dots, J_\nu^+), (J_1^-, J_2^-, \dots, J_\nu^-)\}$ du type précédent. La règle est la suivante : sachant que tout sommet i de l'arbre est relié au sommet i_0 par un chemin unique γ_i , on définit J_j^+ (resp J_j^-) comme l'ensemble des sommets i du type x (resp $\bullet$) tels que le chemin γ_i correspondant soit formé de $2j$ (resp $2j-1$) lignes. A ce couple de partitions ordonnées on associe son ordre σ ; de la sorte on a défini une fonction $\sigma = \sigma(t_\beta)$ sur l'ensemble $T_{I^+I^-}^{(n)}$.

Montrons que les fonctions $\rho(\mu_\alpha)$ et $\sigma(t_\beta)$ satisfont aux conditions du lemme A-5. Pour cela explicitons un peu la construction par récurrence d'un élément $\ell(\mu_\alpha) \in \Lambda_{I^+I^-}^{(n)}$.

Soit $\mu_\alpha = [A_{i_{n-1}} \uparrow \dots [A_{i_1} \downarrow, A_{i_0} \uparrow] \dots]$ et supposons que l'on ait construit $\ell(\mu_{\alpha'}) = \sum_{\beta} k_{\alpha'\beta} t_\beta$, où les arbres t_β ont pour sommets les indices $i_{n-1} \dots i_0$ du monôme $\mu_{\alpha'}$. Alors on a

$$\ell(\mu_\alpha) = \ell([A_{i_n} \uparrow [A_{i_{n-1}} \uparrow \dots A_{i_0} \uparrow] \dots]) = \sum_{\beta} k_{\alpha'\beta} \left(\sum_h \begin{array}{c} \times \\ i_n \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \bullet \\ t_\beta^h \end{array} \right) \quad (A.3)$$

ou bien :

$$\ell(\mu_\alpha) = \ell([A_{i_n} \downarrow [A_{i_{n-1}} \uparrow \dots A_{i_0} \uparrow] \dots]) = - \sum_{\beta} k_{\alpha'\beta} \left(\sum_h \begin{array}{c} \bullet \\ i_n \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \times \\ t_\beta^h \end{array} \right) \quad (A.3')$$

où la sommation $\sum_h$ s'étend à tous les sommets de l'arbre t_β dont le type est opposé à celui de i_n .

On déduit de cette construction la propriété suivante : soit t_β un arbre incident au monôme μ_α (c'est-à-dire tel que $k_{\alpha\beta} \neq 0$) ; soit $\{(I_1^+, \dots, I_\nu^+), (I_1^-, \dots, I_\nu^-)\}$ le couple de partitions associé à μ_α et $\{(J_1^+, \dots, J_\nu^+), (J_1^-, \dots, J_\nu^-)\}$ le couple de partitions associé à t_β . Alors si i_p est un élément de I_ℓ^+ (resp. I_ℓ^-), il lui correspond dans l'arbre t_β un sommet $\times i_p$ (resp. $\bullet i_p$) qui appartient à un sous-

ensemble J_j^+ (resp. J_j^-) tel que $j \leq \ell$. Par suite on a les inclusions :

$$I_\ell^+ \subset J_1^+ \cup \dots \cup J_\ell^+$$

$$I_\ell^- \subset J_1^+ \cup \dots \cup J_\ell^-, \quad \forall \ell \leq \nu$$

qui entraînent :

$$I_1^+ \cup \dots \cup I_\ell^+ \subset J_1^+ \cup \dots \cup J_\ell^+$$

$$\forall \ell \leq \nu$$

$$I_1^- \cup \dots \cup I_\ell^- \subset J_1^- \cup \dots \cup J_\ell^- .$$

Il en résulte d'après les définitions (A.2) (et celles analogues pour σ_ℓ^+) que $\rho_\ell^+ \leq \sigma_\ell^+ \quad \forall \ell \leq \nu$, d'où : $\rho(\mu_\alpha) \leq \sigma(t_\beta)$; ceci démontre la première partie du lemme.

D'autre part à tout arbre t_β est associé un monôme unique μ_α tel que leurs couples de partitions associés soient identiques, donc tel que $\rho(\mu_\alpha) = \sigma(t_\beta)$. Il est clair d'après la construction récurrente donnée ci-dessus que μ_α et t_β sont incidents l'un à l'autre (à tout élément $i_p \in I_j^+$ (resp I_j^-) correspond un sommet $\times i_p$ (resp. $\bullet i_p$) relié à i_0 par $2j$ lignes (resp. $2j-1$ lignes) de l'arbre t_β).

Enfin à tout monôme μ_α on peut faire correspondre au moins un arbre t_β qui lui est incident par la construction suivante : de chaque sommet $i_p \in I_j^+$ (resp I_j^-), on fait partir une ligne (i_p h) dont l'autre extrémité h appartient à la sous-suite qui précède immédiatement I_j^+ (resp. I_j^-) dans le monôme μ_α , soit I_j^- (resp. I_{j-1}^+). Il est alors clair que la partition $\{(J_1^+ \dots J_\nu^+)(J_1^- \dots J_\nu^-)\}$ associée à l'arbre t_β coïncide avec la partition $\{(I_1^+ \dots I_\nu^+)(I_1^- \dots I_\nu^-)\}$ associée à μ_α , d'où $\rho(\mu_\alpha) = \sigma(t_\beta)$.

Le lemme A-5 est donc établi, et par suite le théorème IV.1. Donnons maintenant quelques précisions concernant la démonstration du corollaire du théorème IV.1.

Nous remarquons tout d'abord grâce aux formules (A.3) et (A.3') que les coefficients $k_{\alpha\beta}$ de la formule (A.1) sont égaux soit à 0 si μ_α et t_β ne sont pas incidents l'un à l'autre, soit à $(-1)^{n^-}$ si μ_α et t_β sont incidents l'un à l'autre* ; ce résultat est exprimé dans la formule (14) de la première partie.

Définition : Nous dirons qu'un arbre t_β est normal par rapport à i_0 si pour tout sommet $i_p \in J_j^+$ (resp. $i_p \in J_j^-$), la ligne (i_p, h) a pour extrémité le sommet h dont l'indice est le plus petit dans la suite J_j^- (resp. J_{j-1}^+).

Il est alors clair qu'à tout monôme normal μ_α terminé par A_{i_0} est associé un arbre unique $t_{\beta'(\alpha)}$, normal par rapport à i_0 et tel que $\rho(\mu_\alpha) = \sigma(t_{\beta'(\alpha)})$.

Nous désignerons par $T_{I^+I^-}^{(n)}$ l'ensemble des arbres t_β normaux par rapport à i_0 ; ils sont en correspondance biunivoque avec les monômes $\mu_\alpha \in N_{I^+I^-}^{(n)}$. $T_{I^+I^-}^{(n)}$ désignera l'ensemble des arbres $t_{\beta''}$ non normaux par rapport à i_0 . On a le lemme suivant :

Lemme A-6 - L'ensemble des éléments $\rho(\mu_\alpha)$ ($\mu_\alpha \in N_{I^+I^-}^{(n)}$) et des éléments $t_{\beta''} \in T_{I^+I^-}^{(n)}$ forment une base de $\Lambda_{I^+I^-}^{(n)}$. Plus précisément, on peut résoudre le système des relations :

$$\rho(\mu_\alpha) = \sum_{\beta'} k_{\alpha\beta'} t_{\beta'} + \sum_{\beta''} k_{\alpha\beta''} t_{\beta''} \quad (A.4)$$

au moyen de relations :

$$t_{\beta'} = \sum_{\alpha} r_{\beta'\alpha} \rho(\mu_\alpha) + \sum_{\beta''} s_{\beta'\beta''} t_{\beta''}, \quad \forall t_{\beta'} \in T_{I^+I^-}^{(n)} \quad (A.5)$$

les coefficients $r_{\beta'\alpha}$ et $s_{\beta'\beta''}$ étant entiers.

Démonstration : Supposons les indices α rangés par ordre croissant de $\rho(\mu_\alpha)$ et les indices β' par ordre croissant de $\sigma(t_{\beta'})$. Alors d'après le lemme A-5, le déterminant des $k_{\alpha\beta'}$ est composé de zéros au-dessous de la diagonale et d'éléments ± 1 sur et au-dessus de la diagonale. Ce déterminant vaut donc ± 1 , et le système des relations (A.4) peut donc être résolu grâce à des formules (A.5) à coefficients entiers.

* pourvu que l'élément final de μ_α ait une flèche du type $\uparrow$

En transportant les relations (A.5) dans $\mathcal{O}$ par l'isomorphisme $h_{i_n} \circ \ell^{-1}$, on obtient la résolution du système (15) au moyen de formules du type :

$$F_{\beta'}(x_{i_1} \dots x_{i_n}) = \sum_{\alpha} r_{\beta', \alpha} m_{\alpha}(x_{i_1} \dots x_{i_n}) + \sum_{\beta''} s_{\beta', \beta''} F_{\beta''}(x_{i_1} \dots x_{i_n})$$

où les $F_{\beta''}$ sont des champs d'opérateurs choisis arbitrairement.

Nous nous proposons maintenant de donner, comme conséquence des lemmes A-7 à A-12 la démonstration du théorème V-2.

Théorème V-2 : A tout arbre $t_{\beta} \in T_{I^+ I^-}^{(n)}$, on peut associer un champ d'opérateurs $F_{\beta}(x_1, \dots, x_n)$ sur R_x^{4n} ayant pour support le cône C_{β} , de telle sorte que pour tout monôme m_{α} , on ait :

$$m_{\alpha}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\beta} k_{\alpha\beta} F_{\beta}(x_1, \dots, x_n) \quad (21)$$

et que les relations de Steinmann reliant les O.R.G. $m_{\alpha}(x)$ soient identiquement satisfaites par les seconds membres des équations (21).

Nous allons dans tout ce qui suit considérer comme fixés et quelconques les sous-ensembles I^+, I^- de $\{1, 2, \dots, n\}$. Nous associons à ce couple l'ensemble $\Gamma_{I^+ I^-}^{(n)}$ de tous les graphes γ dont les n sommets et les lignes obéissent aux conditions suivantes :

a) n^+ (resp. n^-) sommets sont repérés par les éléments de l'ensemble I^+ (resp. I^-) et notés $i \times$ (resp. $j \bullet$)

b) toute ligne d'un graphe γ relie un sommet du type $i \times$ à un sommet du type $j \bullet$.

A tout graphe γ , on associe une région de l'espace R_x^{4n} notée (γ) par la règle suivante :

$$(\gamma) = \bigcap_{\substack{x \text{---} \bullet \in \gamma \\ i \quad j}} \{x_i - x_j \in \bar{V}^+\} \bigcap_{\substack{x \text{---} \bullet \notin \gamma \\ i' \quad j'}} \{x_{i'} - x_{j'} \in \mathbb{C} \bar{V}^+\}.$$

Désignons par T_γ le sous-ensemble de $T_{I^+I^-}^{(n)}$ constitué par tous les arbres qui sont des sous-graphes de γ , par T'_γ le complémentaire de T_γ dans $T_{I^+I^-}^{(n)}$.

On a le lemme suivant :

- Lemme A-7 -
- a) L'ensemble des régions (γ) forme une partition de l'espace $\mathbb{R}_x^{4n}$
 - b) Si γ est non connexe, la région (γ) correspondante est extérieure à l'union des cônes C_β associés aux arbres $t_\beta \in T_{I^+I^-}^{(n)}$
 - c) Si γ est connexe, la région (γ) correspondante est donnée par :

$$(\gamma) = \bigcap_{t_\beta \in T_\gamma} C_\beta \cap \left(\bigcup_{t_{\beta'} \in T'_\gamma} C_{\beta'} \right) . \quad (A.6)$$

Pour démontrer a), on remarque que pour tout point $x \in \mathbb{R}_x^{4n}$, tous les vecteurs $x_i - x_j$ sont, soit dans $\bar{V}^+$, soit dans $C\bar{V}^+$, ce qui définit un graphe unique γ tel que $x \in (\gamma)$.

b) est triviale puisque si γ est non connexe, tout arbre t_β contient au moins une ligne $\overset{x}{\underset{i}{\text{---}}}\overset{\bullet}{\underset{j}{\text{---}}}$ extérieure à γ , donc son support C_β contient au moins une condition $x_i - x_j \in \bar{V}^+$ qui le situe à l'extérieur de (γ) .

Condition c) soit $(\gamma)'$ le second membre de A.6. On a évidemment, γ étant connexe :

$$\bigcap_{t_\beta \in T_\gamma} C_\beta = \bigcap_{\overset{x}{\underset{i}{\text{---}}}\overset{\bullet}{\underset{j}{\text{---}}} \in \gamma} \{x_i - x_j \in \bar{V}^+\} .$$

Si maintenant on considère un couple $\overset{x}{\underset{i}{\text{---}}}\overset{\bullet}{\underset{j}{\text{---}}}$ non relié dans γ , tout arbre t_β contenant $\overset{x}{\underset{i}{\text{---}}}\overset{\bullet}{\underset{j}{\text{---}}}$ sera dans T'_γ et l'on aura : $\{x_i - x_j \in C\bar{V}^+\} \subset C_{\beta'}$.

Donc :

$$\bigcap_{\overset{x}{\underset{i}{\text{---}}}\overset{\bullet}{\underset{j}{\text{---}}} \notin \gamma} \{x_i - x_j \in C\bar{V}^+\} \subset \bigcap_{t_{\beta'} \in T'_\gamma} C_{\beta'} = \bigcup_{t_{\beta'} \in T'_\gamma} C_{\beta'} .$$

D'où $(\gamma) \subset (\gamma)'$. Réciproquement soit x un point de $(\gamma)'$ non contenu dans (γ) .

Il doit nécessairement satisfaire à toutes les conditions $x_i - x_j \in \bar{V}^+$ avec $\overset{x}{\underset{i}{\text{---}}}\overset{\bullet}{\underset{j}{\text{---}}} \in \gamma$ et à une condition supplémentaire $x_i - x_j \in \bar{V}^+$ avec $\overset{x}{\underset{i}{\text{---}}}\overset{\bullet}{\underset{j}{\text{---}}} \notin \gamma$. Or γ étant connexe, on peut toujours trouver un arbre t_β contenant $\overset{x}{\underset{i}{\text{---}}}\overset{\bullet}{\underset{j}{\text{---}}}$ et dont toutes les autres lignes appartiennent à γ ; un tel arbre t_β appartient à T'_γ et $x \in C_{\beta'}$,

ce qui contredit l'hypothèse $x \in (\gamma)'$. Par suite $(\gamma) = (\gamma)'$.

Dans le sous-module $\Lambda_{I+I}^{(n)}$ de Λ dont la base canonique est $T_{I+I}^{(n)}$, on désigne par Λ_Y le sous-module engendré par T_Y , et par Λ_Y' le sous-module engendré par T_Y' : Λ_Y et Λ_Y' sont complémentaires dans $\Lambda_{I+I}^{(n)}$.

De même dans l'espace de monômes $\mathcal{D}_{I+I}^{(n)}$, on désigne par $\mathcal{D}_Y'$ le sous-module engendré par tous les monômes emboîtés μ_α dont l'image par ℓ appartient à Λ_Y' . On appelle $\mathcal{D}_Y$ le quotient de $\mathcal{D}_{I+I}^{(n)}$ par $\mathcal{D}_Y'$.

Considérons la base $N_{I+I}^{(n)}$ de $\mathcal{D}_{I+I}^{(n)}$ constituée (voir lemme A-4) par tous les monômes emboîtés normaux μ_α terminés par un élément fixe $A_{i_0} \uparrow$ ou $A_{i_0} \downarrow$. Relativement au graphe γ , la base $N_{I+I}^{(n)}$ se décompose en deux sous-ensembles complémentaires N_Y et N_Y' , N_Y' étant l'ensemble des éléments de $N_{I+I}^{(n)}$ qui appartiennent à $\mathcal{D}_Y'$. L'espace engendré par N_Y' est contenu dans $\mathcal{D}_Y'$ mais ne lui est pas égal en général.

On fait une partition de N_Y en classes d'équivalence au moyen de la définition suivante :

Définition : Deux monômes emboîtés μ_1, μ_2 terminés par $A_{i_0} \uparrow$ sont dits équivalents dans γ si $\ell(\mu_1) - \ell(\mu_2) \in \Lambda_Y'$; $\ell(\mu_1)$ et $\ell(\mu_2)$ définissent le même élément de $\mathcal{D}_Y$.

Soit $h_x \circ i_n$ l'homomorphisme de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{A}_x$ qui associe à tout monôme μ_α un élément $m_{\alpha x}$ de $\mathcal{A}_x$. On a le lemme trivial suivant :

[Lemme A-8 - Pour tout $x \in (\gamma)$ et tout couple de monômes emboîtés μ, μ' tels que $\mu - \mu' \in \mathcal{D}_Y'$, on a $m_{\alpha x} = m'_{\alpha x}$ (en appelant $m_{\alpha x}$ = classe de $i_n(\mu)$, $m'_{\alpha x}$ = classe de $i_n(\mu')$). En d'autres termes, si $x \in (\gamma)$, i_n définit un homomorphisme i_n^x de $\mathcal{D}_Y$ dans $\mathcal{A}_x$.

En effet si $\mu - \mu' \in \mathcal{D}_Y'$ on a : $\mu - \mu' = \sum_{\lambda} \zeta_{\lambda} \mu_{\lambda}$, où les μ_{λ} sont des monômes emboîtés tels que $\ell(\mu_{\lambda}) \in \Lambda_Y'$. D'après le théorème V.1, le support des $m_{\lambda}(x) = h \circ i_n(\mu_{\lambda})$ est une union de cônes C_{β} , tels que $t_{\beta} \in T_Y'$. Or d'après la condition c) du lemme A-7, tous ces cônes sont extérieurs à (γ) . Donc $m_{\alpha x} = m'_{\alpha x}$ pour $x \in (\gamma)$.

Définition : On désignera par h_x l'homomorphisme qui à tout élément $m_{\alpha x} \in \mathcal{A}_x$ associe la valeur du champ d'opérateurs $m_{\alpha}(x_1 \dots x_n)$ au point $x = (x_1 \dots x_n)$, l'espace engendré par ces valeurs étant désigné par $\mathcal{O}_x$. Rappelons que $\mathcal{O}_x$ est le quotient de $\mathcal{O}$ par l'idéal engendré par les relations de causalité : $[A(x_i), A(x_j)] = 0$ si $(x_i - x_j)^2 < 0$, et que h_x s'obtient donc à partir de h par passage aux quotients : $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_x$ et $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_x$.

Nous allons maintenant analyser la structure des classes d'équivalence d'éléments de N_Y .

Lemme A-9 - Pour que deux éléments μ_1, μ_2 de N_Y soient équivalents dans γ , il faut et il suffit que l'on puisse passer de μ_1 à μ_2 par une suite de transpositions de couples $(A_i \uparrow, A_j \downarrow)$ ($i \in I^+, j \in I^-$) tels que $i \times$ et $j \bullet$ ne soient pas reliés dans le graphe γ .

Démonstration : La condition est suffisante ; soit en effet une suite de transpositions permettant de passer de μ_1 à μ_2 et faisant intervenir des couples $(i \times, j \bullet)$ non reliés dans γ . Par une application simple de l'identité de Jacobi, on a :

$$\mu_1 - \mu_2 = \sum_{(i \times, j \bullet)} [\dots [A_i \uparrow, A_j \downarrow] \dots] \quad (A.7)$$

Or pour tout monôme μ_{ij} terminé par $A_i \uparrow A_j \downarrow$, le développement de $\ell(\mu_{ij})$ ne contient que des arbres contenant la ligne $\overset{\times}{i} \text{---} \overset{\bullet}{j}$, lesquels appartiennent tous à T'_Y . Ainsi on a : $\ell(\mu_1) - \ell(\mu_2) \in \Lambda'_Y$.

La condition est nécessaire :

i) Considérons l'ensemble des sommets $i \times_{\eta}$ reliés par une ligne à un sommet $j \bullet$ donné, dans le graphe γ (ou de même les sommet $j \bullet_{\eta}$ reliés à un sommet $i \times$ donné). Une condition nécessaire pour que μ_1 et μ_2 soient équivalents dans γ est que pour tout $j \bullet$, l'ensemble des $i \times_{\eta}$ situés à droite (ou à gauche) de j soit le même dans les permutations d'indices qui définissent μ_1 et μ_2 . En effet si pour un certain j , un indice i_{α} était à droite de j dans la permutation de μ_1 et à gauche de j dans celle de μ_2 , tout arbre du développement de μ_1 contenant la

ligne $\overset{x}{\underset{i_\alpha}{\text{---}}} \bullet_j$ contiendrait une branche où se rencontrent j, i_α, i_o dans cet ordre, alors que dans tout arbre du développement de μ_2 contenant la même ligne, on aurait une branche où se rencontrent i_α, j, i_o dans cet ordre. $\ell(\mu_1)$ et $\ell(\mu_2)$ n'auraient donc aucun arbre en commun et μ_1, μ_2 ne pourraient être équivalents.

ii) On va définir une suite de transpositions permettant de passer de μ_2 à μ_1 : on permute les lettres de μ_2 vers la droite jusqu'à ce qu'elles occupent la même place que dans μ_1 . L'ordre dans lequel on procède est celui des lettres rangées dans μ_1 de droite à gauche. Supposons l'opération faite pour les p premières lettres (la première l'est déjà au départ) et considérons la $(p+1)^{\text{ème}}$ lettre de μ_1 que l'on déplace vers la droite à partir de sa position dans μ_2 jusqu'au rang $p+1$. On ne fait que des transpositions de cette lettre $A_{i_{p+1}} \uparrow$ avec des lettres $A_i \downarrow$ telles que i et i_{p+1} ne soient pas reliés dans γ . En effet, si on avait à permuter i et i_{p+1} reliés dans γ cela prouverait que ces deux indices ne sont pas dans le même ordre dans μ_1 et μ_2 , ce qui contredirait i). La condition nécessaire est donc établie.

Lemme A-10 - Dans N_γ , chaque classe d'équivalence possède un élément $\mu_\alpha^{\max}$ qui est maximal pour l'ordre $\rho(\mu_\alpha)$ défini dans le lemme A-5.

Dans chaque classe d'équivalence il existe un ou plusieurs éléments maximaux ; nous voulons montrer qu'il n'y en a qu'un. Supposons qu'on ait deux éléments maximaux μ et μ' ($\rho(\mu) = \rho(\mu')$) et considérons toutes les sous-suites I_1^+, I_2^+ etc... de μ et $I_1'^+, I_2'^+$ etc... de μ' en partant de la droite ; soit I_p^+ et $I_p'^+$ (ou $I_p^-, I_p'^-$) les premières sous-suites qui diffèrent entre elles et soit i un indice de la suite I_p^+ n'appartenant pas à $I_p'^+$. Dans μ' , l'indice i appartient à une sous-suite $I_q'^+$ telle que $q > p$. Or comme μ et μ' sont équivalents, il résulte du lemme A-9 qu'on peut faire des transpositions de $A_i \uparrow$ avec tous les $A_j \downarrow$ tels que j appartienne aux sous-suites $I_{p+1}', I_{p+2}', \dots, I_q'^-$ en restant dans la même classe d'équivalence ; on définit ainsi un nouveau monôme μ'' qui diffère de μ' par la seule position de $A_i \uparrow$: $I_p''^+ = I_p'^+ \cup \{i\}$. Il résulte alors de la définition (A.2) de l'ordre ρ que $\rho(\mu'') > \rho(\mu')$, ce qui contredit l'hypothèse que μ' est maximal dans sa classe.

Lemme A-11 - L'homomorphisme ℓ qui applique $\mathcal{D}_{I+I}^{(n)}$ dans $\Lambda_{I+I}^{(n)}$ définit par passage aux quotients un homomorphisme ℓ_Y de $\mathcal{D}_Y$ dans Λ_Y ; l'homomorphisme ℓ_Y est injectif.

Si μ et μ' définissent le même élément μ^Y de $\mathcal{D}_Y$, on a $\mu - \mu' = \sum_i \lambda_i \mu_i$ avec $\mu_i \in \mathcal{D}'_Y$, d'où $\ell(\mu) - \ell(\mu') = \sum_i \lambda_i \ell(\mu_i) \in A'_Y$. Donc $\ell(\mu)$ et $\ell(\mu')$ ont la même projection sur A_Y qui définit $\ell_Y(\mu^Y)$.

Si on développe un monôme μ quelconque suivant la base $N_{I+I}^{(n)}$ on obtient $\mu = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \mu_{\alpha} + \sum_{\alpha'} b_{\alpha'} \mu_{\alpha'}$, ou $\mu_{\alpha} \in N_Y$ et $\mu_{\alpha'} \in N'_Y$. De plus chaque μ_{α} peut être remplacé par l'élément maximal $\mu_{\alpha}^{\max}$ de sa classe d'équivalence, modulo $\mathcal{D}'_Y$.

L'ensemble des classes d'équivalence de N_Y est donc un ensemble complet de vecteurs de $\mathcal{D}_Y$; à chacun de ces vecteurs on associe comme représentant l'élément maximal $\mu_{\alpha}^{\max}$ de la classe et l'ordre $\rho(\mu_{\alpha}^{\max})$. Le fait que ℓ est injectif va résulter de l'indépendance linéaire modulo A'_Y des éléments $\ell(\mu_{\alpha}^{\max})$. La démonstration de ce résultat est calquée sur la démonstration du théorème IV.1 à partir du lemme A-5. Il nous suffit de démontrer ici l'analogue du lemme A-5.

Lemme A-12 - Les fonctions $\rho(\mu_{\alpha})$ et $\sigma(t_{\beta})$ du lemme A-5 satisfont aux propriétés suivantes :

1) Si un monôme $\mu_{\alpha}^{\max} \in N_Y$ et un arbre $t_{\beta} \in T_Y$ sont incidents l'un à l'autre, on a l'inégalité :

$$\sigma(t_{\beta}) \geq \rho(\mu_{\alpha}^{\max}) .$$

2) Pour tout arbre $t_{\beta} \in T_Y$, il existe un monôme $\mu_{\alpha}^{\max}$ et un seul, incident à t_{β} , tel que $\sigma(t_{\beta}) = \rho(\mu_{\alpha}^{\max})$.

3) Pour tout monôme $\mu_{\alpha}^{\max} \in N_Y$, il existe au moins un arbre $t_{\beta} \in T_Y$, incident à $\mu_{\alpha}^{\max}$, tel que $\sigma(t_{\beta}) = \rho(\mu_{\alpha}^{\max})$.

La première partie est une conséquence triviale de la première partie du lemme A-5. D'après la deuxième partie du lemme A-5, il existe un monôme μ_α et un seul incident à $t_\beta \in T_Y$ tel que $\sigma(t_\beta) = \rho(\mu_\alpha)$; montrons que μ_α est maximal ; un élément $A_i \uparrow$ (resp. $A_i \downarrow$) ne peut commuter avec tous les $A_j \downarrow$ (resp. $A_j \uparrow$) de la sous-suite qui précède celle contenant i ; en effet il y a au moins une commutation correspondant à un couple (ij) relié dans γ : c'est le couple qui définit une ligne de t_β (par construction de μ_α) . Or la commutation de $A_i \uparrow$ avec tous les $A_j \downarrow$ de la sous-suite précédente est le seul moyen d'augmenter l'ordre de μ_α ; toute commutation partielle aboutit à l'augmentation du nombre de sous-suites non vides, et d'après (A.2) à la diminution de $\rho(\mu_\alpha)$.

Démontrons enfin la troisième partie du lemme. Soit un monôme maximal $\mu_\alpha^{\max}$; comme il est maximal, il existe pour tout élément $A_i \uparrow$ (resp. $A_i \downarrow$) au moins un élément $A_j \downarrow$ (resp. $A_j \uparrow$) où j appartient à la sous-suite précédant la sous-suite contenant i , tel que (ij) soient reliés dans γ (sinon on construirait un μ' équivalent à $\mu_\alpha^{\max}$ et d'ordre supérieur). Cette propriété qui associe à chaque i un indice j de la sous-suite précédente permet de construire au moins un arbre $t_\beta \in T_Y$ incident à $\mu_\alpha^{\max}$ et tel que $\sigma(t_\beta) = \rho(\mu_\alpha^{\max})$.

Le lemme A-11 nous a permis de construire dans Λ_Y considéré comme quotient de $\Lambda_{I+I-}^{(n)}$ par Λ_Y' un ensemble de vecteurs linéairement indépendants ℓ_Y (classe de $\mu_\alpha^{\max}$) = $\ell(\mu_\alpha^{\max})$ modulo Λ_Y' . Par un raisonnement analogue à celui du lemme A-6 et résultant ici du lemme A-12, on compléterait ce système de vecteurs par un ensemble d'arbres $t_{\beta''}$ pour former une base de Λ_Y . Soit $\{t_{\beta'''}\}$ l'ensemble des arbres de T_Y analogues aux arbres normaux en correspondance biunivoque avec les classes d'éléments $\ell(\mu_\alpha^{\max})$. $\{t_{\beta'''}\}$ et $\{t_{\beta''}\}$ sont deux ensembles complémentaires dans T_Y . Comme dans le lemme A-6 on résout alors le système :

$$\ell_Y(\text{classe de } \mu_\alpha^{\max}) = \sum_{\beta'''} k_{\alpha\beta'''} t_{\beta'''} + \sum_{\beta''} k_{\alpha\beta''} t_{\beta''} ,$$

au moyen de relations :

$$t_{\beta'''} = \sum_{\alpha} r_{\beta''' \alpha} \ell_Y(\text{classe de } \mu_\alpha^{\max}) + \sum_{\beta''} s_{\beta''' \beta''} t_{\beta''} . \quad (A.8)$$

On associe alors aux arbres $t_{\beta''}$ des valeurs arbitraires $F_{\beta''}(x_1, \dots, x_n)$, ce qui revient à prolonger à Λ_Y tout entier l'homomorphisme $h_x \circ i_n^x \circ \ell_Y^{-1}$ de $\ell_Y(\mathcal{Q})$ dans $\mathcal{O}_x$. En transportant les relations (A.8) par cet homomorphisme, on en déduit

les relations :

$$F_{\beta'''}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha} r_{\beta''', \alpha} m_{\alpha}(x_1, \dots, x_n) + \sum_{\beta''} s_{\beta''', \beta''} F_{\beta''}(x_1, \dots, x_n) .$$

Ces relations résolvent le système d'équations (21) pour tout point $x = (x_1, \dots, x_n) \in \gamma$, et établissent ainsi le théorème V.2 .

APPENDICE B

Nous nous proposons d'étendre ici le théorème V.2 au cas de distributions à valeurs opérateurs, plus réaliste que celui des champs d'opérateurs traité dans le premier article. En effet les monômes emboîtés $m_\alpha(x)$ doivent être considérés de même que les champs de Wightman, comme des distributions à valeurs opérateurs. Il s'agit ici de montrer le théorème suivant :

Théorème : Les m_α étant des distributions de supports Σ_α satisfaisant aux relations de Steinmann, il existe des distributions à valeurs opérateur F_β de supports C_β telles que les relations

$$(S) \quad m_\alpha = \sum_{\beta} k_{\alpha\beta} F_\beta \quad (21)$$

soient satisfaites.

A chaque région (γ) on associe le système algébrique S_γ , déduit de S en faisant égaux à zéro tous les éléments m_α et F_β dont le support ne contient pas (γ) . C'est la résolubilité de tous ces systèmes algébriques S_γ qui a été montrée dans la fin de l'Appendice A. Pour démontrer le théorème ci-dessus, on va montrer

Lemme B-1 - Toute distribution m_α peut s'écrire

$$m_\alpha = \sum_{(\gamma) \subset \Sigma_\alpha} m_{\alpha\gamma} \quad (B.1)$$

où les distributions $m_{\alpha\gamma}$ possèdent les propriétés suivantes :

a) $m_{\alpha\gamma}$ a pour support $(\bar{\gamma})$

b) γ étant fixé, l'ensemble des distributions $m_{\alpha\gamma}$ satisfait aux conditions de compatibilité du système algébrique S_γ .

S'il en est ainsi, on peut d'après l'appendice A résoudre chaque système S_Y et définir ainsi des distributions $F_{\beta Y}$ de support $(\bar{Y})$. On pose ensuite

$$F_\beta = \sum_{(Y) \subset C_\beta} F_{\beta Y}.$$

Les distributions F_β satisfont par construction aux relations (21). En effet Y étant fixé, les ensembles $\{m_{\alpha Y}\}$ et $\{F_{\beta Y}\}$ satisfont au système S_Y ; si on complète ces ensembles par des éléments $m_{\alpha Y} = 0$ et $F_{\beta Y} = 0$ pour $(Y) \not\subset \Sigma_\alpha$ et $(Y) \not\subset C_\beta$, ces ensembles complétés satisfont au système S , soit :

$$m_{\alpha Y} = \sum_{\beta} k_{\alpha\beta} F_{\beta Y}. \quad (B.2)$$

En sommant membre à membre les formules (B.2) sur tous les Y on obtient bien les relations (21). Le fait que le support de F_β soit bien C_β est trivial puisque :

$$\forall \beta \quad C_\beta = \bigcup_{(Y; t_\beta \in T_Y)} (Y) = \bigcup_{(Y; t_\beta \in T_Y)} (\bar{Y}). \quad (B.3)$$

(Les égalités (B.3) résultent immédiatement de la définition des régions (Y)).

En vue de démontrer le lemme B-1 nous allons introduire quelques notions géométriques.

On définit un ordre partiel sur l'ensemble des régions (Y) par la condition suivante : $(Y') < (Y)$ si l'ensemble des lignes du graphe Y' est un sous-ensemble des lignes du graphe Y . On désigne par Ω_Y l'union des régions (Y') telles que $(Y') < (Y)$; Ω_Y est un ensemble ouvert défini par la formule

$$\Omega_Y = \left\{ x; x_i - x_j \in \mathbb{C} \bar{V}^+ \quad ; \quad (i, j \text{ non reliés dans } Y) \right\}.$$

On définit aussi un préordre total $N(Y)$ comme le nombre de lignes du graphe Y .

Nous admettrons que tout couple de régions $(\bar{Y}), (\bar{Y}')$ est régulièrement séparé par $(\bar{Y}) \cap (\bar{Y}')$; ce résultat provient du fait que tout $(\bar{Y})$ est bordé par des frontières de cônes quadratiques.

Nous allons construire par récurrence sur $N(\gamma)$ les distributions $m_{\alpha\gamma}$ du lemme B-1.

Supposons que pour tout γ tel que $N(\gamma) < \nu$, on ait pu déterminer des distributions $m_{\alpha\gamma}$ possédant les propriétés suivantes :

- a) $m_{\alpha\gamma}$ a pour support $\bar{\gamma} \subset \Sigma_{\alpha}$
- b) $\{m_{\alpha\gamma}\}_{\gamma \text{ fixé}}$ satisfait aux conditions de compatibilité du système S_{γ}
- c) $m_{\alpha}^{(\nu)} = m_{\alpha} - \sum_{\substack{(\gamma) \subset \Sigma_{\alpha} \\ N(\gamma) < \nu}} m_{\alpha\gamma}$ a son support contenu dans $\bigcup_{N(\gamma) \geq \nu} (\bar{\gamma})$

d) Pour tout γ tel que $N(\gamma) \geq \nu$ les restrictions des $m_{\alpha}^{(\nu)}$ à l'ouvert Ω_{γ} satisfont aux conditions de compatibilité du système S_{γ} .

Alors on va construire des $m_{\alpha\gamma}$ pour $N(\gamma) = \nu$ et des $m_{\alpha}^{(\nu+1)} = m_{\alpha} - \sum_{N(\gamma) \leq \nu} m_{\alpha\gamma}$ qui satisfont encore à ces propriétés.

Le début de la récurrence est trivial puisque pour $N(\gamma)$ minimum $m_{\alpha}^{(\nu)} = m_{\alpha}$, et $\{m_{\alpha}\}$ satisfait c) ($\bigcup (\bar{\gamma}) = \text{tout l'espace}$) et d) par définition de S_{γ} et de Ω_{γ} (si (γ) n'est pas contenu dans un cône Σ_{α} , il en est de même de tous les $(\gamma') < (\gamma)$, donc de Ω_{γ}).

Classons maintenant toutes les régions (γ) de préordre $N(\gamma) = \nu$ suivant un ordre arbitraire $(\gamma_{i1}) \dots (\gamma_{ip}) \dots (\gamma_{i\nu})$. Pour tout indice α , on va retrancher successivement de $m_{\alpha}^{(\nu)}$ des distributions $m_{\alpha\gamma_{i1}} \dots m_{\alpha\gamma_{ip}} \dots m_{\alpha\gamma_{i\nu}}$ de supports respectifs $(\bar{\gamma}_{i1}) \dots (\bar{\gamma}_{ip}) \dots (\bar{\gamma}_{i\nu})$. Supposons faites les p premières opérations et définissons comme suit la $(p+1)^{\text{ème}}$ opération :

On prend un sous-ensemble d'indices α correspondant à une base du système $S_{\gamma_{ip+1}}$. Pour tous ces indices α , on décompose la distribution

$m_{\alpha}^{(\nu), p} = m_{\alpha}^{(\nu)} - m_{\alpha\gamma_{i1}} - \dots - m_{\alpha\gamma_{ip}}$ en la somme de deux distributions : l'une

$m_{\alpha\gamma_{ip+1}}$ de support $\bar{\gamma}_{ip+1}$, l'autre $m_{\alpha}^{(\nu), p+1} = m_{\alpha}^{(\nu)} - m_{\alpha\gamma_{i1}} - \dots - m_{\alpha\gamma_{ip}} - m_{\alpha\gamma_{ip+1}}$

de support $(\bar{\gamma}_{ip+2}) \cup \dots \cup (\bar{\gamma}_{i\nu}) \cup (\bigcup_{N(\gamma) > \nu} (\bar{\gamma}))$. Ceci est toujours possible, les

supports étant régulièrement séparés. On en déduit les distributions $m_{\alpha\gamma_{ip+1}}$

pour tous les autres indices α de façon à satisfaire les conditions de compatibilité du système $S_{\gamma_{i_{p+1}}}$; toutes ces distributions ont pour support $(\gamma_{i_{p+1}})$. De plus pour tous ces indices α , la distribution résiduelle $m_{\alpha}^{(\nu), p+1} = m_{\alpha}^{(\nu), p} - m_{\alpha \gamma_{i_{p+1}}}$ s'annule bien dans $\Omega_{\gamma_{i_{p+1}}}$; ceci résulte de l'hypothèse récurrente d) d'après laquelle $\{m_{\alpha}^{(\nu), p}\}$ satisfait les conditions de compatibilité de $S_{\gamma_{i_{p+1}}}$ dans l'ouvert $\Omega_{\gamma_{i_{p+1}}}$. Reste à vérifier que ces soustractions n'ont pas modifié la propriété d) du reste ; à savoir : pour tout γ tel que $N(\gamma) > \nu$ et tout γ_{i_q} tel que $q \geq p+2$, les distributions $m_{\alpha}^{(\nu), p+1}$ satisfont aux conditions de compatibilité du système S_{γ} dans l'ouvert Ω_{γ} . Pour cela on vérifie d'abord que la soustraction de $m_{\alpha \gamma_{i_{p+1}}}$ ne modifie pas la distribution $m_{\alpha}^{(\nu), p}$ dans aucun des ouverts $\Omega_{\gamma_{i_{p+2}}} \dots \Omega_{\gamma_{i_{\nu}}}$, parce que tous ces ouverts sont des unions de régions (γ) qui ne sont pas $> (\gamma_{i_{p+1}})$ et que la fermeture de $(\gamma_{i_{p+1}})$ est contenue dans $\bigcup_{(\gamma) > (\gamma_{i_{p+1}})} (\gamma)$. Considérons maintenant les régions (γ) de préordre $N(\gamma) > \nu$. Si $(\gamma) \not> (\gamma_{i_{p+1}})$, la soustraction de $m_{\alpha \gamma_{i_{p+1}}}$ ne modifie rien dans Ω_{γ} (même raison) ; si $(\gamma) > (\gamma_{i_{p+1}})$, c'est-à-dire $(\gamma_{i_{p+1}}) \subset \Omega_{\gamma}$, l'ensemble des $m_{\alpha \gamma_{i_{p+1}}}$ complété par des éléments convenables égaux à zéro est un ensemble particulier qui satisfait aux conditions de compatibilité du système S_{γ} ; la soustraction de cet ensemble, restreint à Ω_{γ} donne donc un ensemble $\{m_{\alpha}^{(\nu), p+1}\}$ qui satisfait dans Ω_{γ} aux conditions de compatibilité de S_{γ} . La récurrence s'enchaîne donc d'abord sur tous les indices i_p des régions (γ_{i_p}) de préordre ν , ensuite sur la valeur du préordre $N(\gamma) = \nu$. La fin de la récurrence s'obtient lorsque $N(\gamma)$ a sa valeur maximum $\nu_{\max}$: il existe une seule région $(\gamma_{\max})$ telle que $N(\gamma_{\max}) = \nu_{\max}$ (le graphe $\gamma_{\max}$ possède toutes les liaisons possibles) et $\Omega_{\gamma_{\max}}$ est tout l'espace : les distributions résiduelles $m_{\alpha}^{(\nu_{\max})}$ ont alors pour support $(\gamma_{\max}) \equiv \overline{(\gamma_{\max})}$ et satisfont aux conditions de compatibilité du système $S_{\gamma_{\max}}$, identique à S . La démonstration du lemme B-1 est donc achevée.

PROLOGUE AU DEUXIEME ARTICLE

SUR CERTAINES ENVELOPPES D'HOLOMORPHIE DEFINIES PAR INTERPOLATION

Nous étudierons des exemples de domaines $D \subset \mathbb{C}^n$ de la forme $D = D_0 \cup D_1$, pour lesquels l'enveloppe d'holomorphie $\mathcal{H}(D)$ est une union de domaines interpolants D_λ avec $0 \leq \lambda \leq 1$:

$$\mathcal{H}(D) = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} D_\lambda .$$

L'exemple principal que nous choisirons est celui de l'union de deux polycercles D_0 et D_1 .

Prenons d'abord un exemple à deux variables complexes z, z' . Les projections de D_0 et D_1 dans l'espace de chacune des variables sont supposées être des cercles sécants ; soient α, β (resp. α', β') dans le plan des z (resp. z') les points d'intersection des projections des bords de D_0, D_1 dans ce plan. On peut écrire :

$$D_0 = \left\{ (z, z') \ ; \ \gamma_0 < \text{Arg.} \frac{z - \alpha}{z - \beta} < \gamma_0 + \pi \ ; \ \gamma'_0 < \text{Arg.} \frac{z' - \alpha'}{z' - \beta'} < \gamma'_0 + \pi \right\}$$

$$D_1 = \left\{ (z, z') \ ; \ \gamma_1 < \text{Arg.} \frac{z - \alpha}{z - \beta} < \gamma_1 + \pi \ ; \ \gamma'_1 < \text{Arg.} \frac{z' - \alpha'}{z' - \beta'} < \gamma'_1 + \pi \right\}$$

avec $-\pi < \gamma_0, \gamma'_0, \gamma_1, \gamma'_1 < \pi$.

En utilisant la transformation conforme $\zeta = \log \frac{z - \alpha}{z - \beta}$, $\zeta' = \log \frac{z' - \alpha'}{z' - \beta'}$ D_0 et D_1 deviennent deux tubes Δ_0, Δ_1 dont les bases sont des carrés

$$\Delta_0 = \left\{ (\zeta, \zeta') \ ; \ \gamma_0 < \text{Im} \zeta < \gamma_0 + \pi \ ; \ \gamma'_0 < \text{Im} \zeta' < \gamma'_0 + \pi \right\}$$

$$\Delta_1 = \left\{ (\zeta, \zeta') \ ; \ \gamma_1 < \text{Im} \zeta < \gamma_1 + \pi \ ; \ \gamma'_1 < \text{Im} \zeta' < \gamma'_1 + \pi \right\} .$$

L'enveloppe d'holomorphie de $\Delta_0 \cup \Delta_1$ est le tube dont la base est l'enveloppe convexe de l'union des bases de Δ_0 et Δ_1 . Cette enveloppe convexe (voir Fig.1) est l'union des tubes interpolants Δ_λ dont les bases sont des carrés :

$$\Delta_\lambda = \left\{ (\zeta, \zeta') \quad ; \quad \gamma_\lambda < \text{Im} \zeta < \gamma_\lambda + \pi \quad ; \quad \gamma'_\lambda < \text{Im} \zeta' < \gamma'_\lambda + \pi \right\}$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda &= \lambda \gamma_1 + (1 - \lambda) \gamma_0 \\ \gamma'_\lambda &= \lambda \gamma'_1 + (1 - \lambda) \gamma'_0 \\ 0 &\leq \lambda \leq 1 \end{aligned}$$

En revenant aux variables initiales z, z' , on obtient l'enveloppe d'holomorphie de $D_1 \cup D_2$ comme image de l'enveloppe d'holomorphie de $\Delta_1 \cup \Delta_2$, ce qui donne :

$$\mathcal{H}(D_1 \cup D_2) = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} D_\lambda,$$

avec :

$$D_\lambda = \left\{ (z, z') \quad ; \quad \gamma_\lambda < \text{Arg} \frac{z - \alpha}{z - \beta} < \gamma_\lambda + \pi \quad ; \quad \gamma'_\lambda < \text{Arg} \frac{z' - \alpha'}{z' - \beta'} < \gamma'_\lambda + \pi \right\}.$$

Pour tout λ compris entre 0 et 1, D_λ est un polycercle dont chaque projection appartient au faisceau linéaire défini par les projections correspondantes de D_0 et D_1 .

Ce résultat se généralise au cas où le nombre n de variables est quelconque et où les différentes projections des polycercles D_0, D_1 occupent les 3 positions géométriques possibles :

1^{er} cas : les bords des projections de D_0, D_1 sur le plan z_i se coupent en deux points α_i, β_i ;

2^{ème} cas : la projection de D_0 (resp. D_1) sur le plan z_j est intérieure à la projection de D_1 (resp. D_0). On appelle alors α_j, β_j les points limites du faisceau linéaire défini par ces deux cercles ;

3^{ème} cas : les projections de D_0 et D_1 sur le plan z_k sont deux cercles tangents intérieurement en un point α_k , dont le diamètre commun fait l'angle φ_k avec l'axe Ox_k .

On se ramène à des tubes Δ_0, Δ_1 à base parallélépipédique en effectuant dans chaque variable une transformation conforme appartenant à l'un des trois types suivants :

$$\zeta_i = \log \frac{z_i - \alpha_i}{z_i - \beta_i}$$

$$\zeta_j = i \log \frac{z_j - \alpha_j}{z_j - \beta_j}$$

$$\zeta_k = \frac{ie^{i\varphi_k}}{z_k - \alpha_k} .$$

Comme Δ_0 et Δ_1 se déduisent l'un de l'autre par translation, $\mathcal{H}(\Delta_0 \cup \Delta_1) = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} \Delta_\lambda$,

où :

$$\Delta_\lambda = \{(\zeta_i, \zeta_j, \zeta_k) ; \gamma_\lambda^i < \text{Im}\zeta_i < \gamma_\lambda^i + \pi ; \text{Im}\zeta_j > \rho_\lambda^j ; \text{Im}\zeta_k > \sigma_\lambda^k\}$$

avec :

$$\gamma_\lambda^i = \lambda \gamma_1^i + (1 - \lambda) \gamma_0^i$$

$$\rho_\lambda^j = \lambda \rho_1^j + (1 - \lambda) \rho_0^j$$

$$\sigma_\lambda^k = \lambda \sigma_1^k + (1 - \lambda) \sigma_0^k$$

$$-\pi < \gamma_0^i, \gamma_1^i < 0$$

$$\rho_0^j, \rho_1^j, \sigma_0^k, \sigma_1^k \text{ réels .}$$

En revenant aux variables initiales z_i, z_j, z_k , on en déduit la propriété suivante :

Théorème : L'enveloppe d'holomorphie de l'union de deux polycercles D_0, D_1 est une union de polycercles interpolants :

$$\mathcal{H}(D_0 \cup D_1) = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} D_\lambda .$$

La projection de tout polycercle D_λ sur le plan d'une variable quelconque est un cercle appartenant au faisceau linéaire défini par les projections correspondantes de D_0 et D_1 (Fig.2) .

Remarque - Une situation géométrique limite du théorème des polycercles se produit dans le théorème dit de l' "edge of the wedge" sous sa forme la plus simple que nous énoncerons ici sans démonstration.

Théorème : D_0 est un produit de lunules du demi-plan supérieur :

$$D_0 = \left\{ z_i, 1 \leq i \leq n ; \quad \pi - \varepsilon < \operatorname{Arg} \frac{z_i - 1}{z_i + 1} < \pi \right\}$$

D_1 est un produit de lunules du demi-plan inférieur :

$$D_1 = \left\{ z_i, 1 \leq i \leq n ; \quad \pi < \operatorname{Arg} \frac{z_i - 1}{z_i + 1} < \pi + \varepsilon \right\} .$$

Pour tout couple de fonctions f_0, f_1 analytiques respectivement dans D_0 et ayant des valeurs au bord distributions qui coïncident sur l'intervalle $\{z_i ; 1 \leq i \leq n$
 $-1 < z_i \text{ réel} < +1\}$, il existe une fonction analytique f qui est leur prolongement commun. f est analytique dans $\bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} D_\lambda$, où :

$$D_\lambda = \left\{ z_i, 1 \leq i \leq n ; \quad \pi - (1 - \lambda)\varepsilon < \operatorname{Arg} \frac{z_i - 1}{z_i + 1} < \pi + \lambda\varepsilon \right\} .$$

Après transformation conforme $\zeta_i = \log \frac{z_i - 1}{z_i + 1}$, on est dans le cas où les carrés, bases des tubes Δ_0 et Δ_1 se touchent par un sommet (Fig.3) ; la réponse continue à être l'enveloppe convexe de $\Delta_0 \cup \Delta_1$, soit $\bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} \Delta_\lambda$, bien que le domaine $D_0 \cup D_1$ soit remplacé par 2 domaines disjoints qui se touchent ; la connexité est ici remplacée par la condition de coïncidence des valeurs au bord de f_0 et f_1 .

Donnons maintenant une légère généralisation du cas des polycercles.

Soit $\{F_i ; 1 \leq i \leq n\}$ un ensemble de fonctions analytiques d'une variable et supposons que les domaines D_0, D_1 soient définis de la façon suivante :

$$D_0 = \left\{ z_i ; 1 \leq i \leq n ; \quad a_i < \operatorname{Im} F_i(z_i) < b_i \right\}$$

$$D_1 = \left\{ z_i ; 1 \leq i \leq n ; \quad c_i < \operatorname{Im} F_i(z_i) < d_i \right\}$$

avec $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$; alors on a : $\mathcal{H}(D_0 \cup D_1) = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} D_\lambda$

où :

$$D_\lambda = \left\{ z_i ; 1 \leq i \leq n ; \quad (1 - \lambda)a_i + \lambda c_i < \operatorname{Im} F_i(z_i) < (1 - \lambda)b_i + \lambda d_i \right\} .$$

On se ramène en effet toujours au cas des tubes par la transformation conforme $\{\zeta_i = F_i(z_i) ; 1 \leq i \leq n\}$.

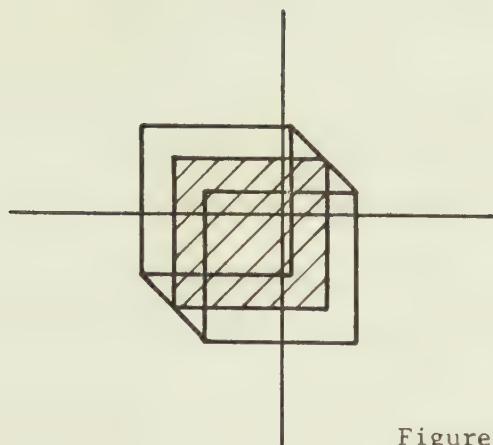


Figure 1 : Le carré hachuré est la base d'un tube interpolant Δ_λ .

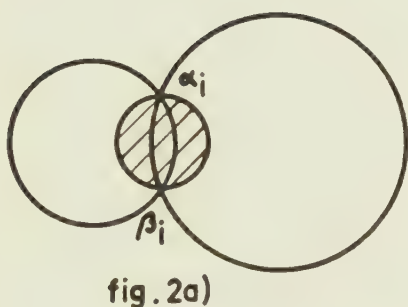


fig. 2a)

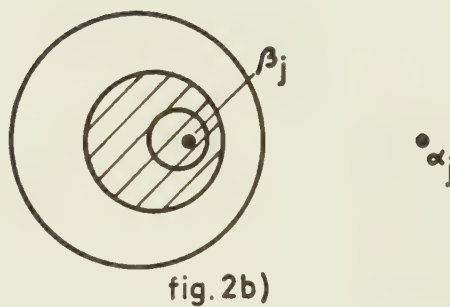


fig. 2b)

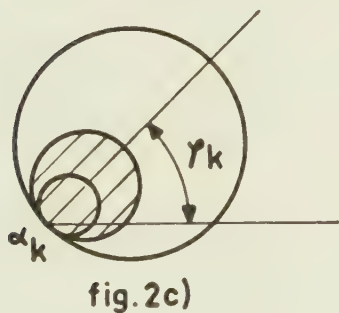


fig. 2c)

Figures 2 : On a hachuré les projections d'un polycercle interpolant D_λ .

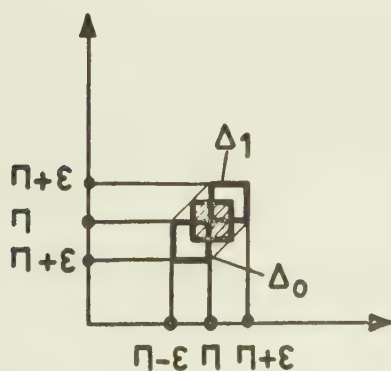


Figure 3

AXIOMATIC FIELD THEORY

J. BROS

CENTRE D'ÉTUDES NUCLÉAIRES DE SACLAY,
SERVICE DE PHYSIQUE THÉORIQUE,
FRANCE

1. INTRODUCTION: ANALYTICITY IN MOMENTUM-SPACE AND THE PROOF OF CROSSING FOR TWO-PARTICLE AMPLITUDES

In the formalisms of LEHMANN, SYMANZIK and ZIMMERMANN [1] and of BOGOLUBOV [2] reduction formulae have been written which display the scattering amplitudes as being the boundary values on the mass shell of some analytic functions $H_n(k)$ of the four-momenta $k = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$

$\left(\sum_{i=1}^n k_i = 0 \quad k_i = p_i + iq_i \right)$ which are primitively defined off the mass shell. Since

the primitive domain of analyticity of $H_n(k)$ is not a natural domain of holomorphy, the function $H_n(k)$ is certainly analytic, at least in the envelope of holomorphy of the primitive domain. Then the problem arises of computing this envelope of holomorphy – or at least some subdomain of it – and of investigating whether this new domain has points on the mass shell. A few steps of this programme have been performed and will be described (or outlined) in this paper. Concerning the n -point functions, some general results of STEINMANN [3] and RUELLE [4] (see also ARAKI and BURGOYNE [5]) are described and re-obtained by another method and some new properties have been proved. Concerning the four-point function, further steps could be taken, in particular the proof of crossing in the case of stable particles with arbitrary masses. These results and the methods of analytic completion which have been used in their derivation, have been worked out by BROS, EPSTEIN and GLASER¹ (and most of them have already been published in Refs. [6] and [7]).

The starting point

For every integer $n > 2$, we assume the existence of a certain set S^n of generalized retarded functions (more precisely: "tempered distributions") called "Steinmann monomials" [3], which fulfil the conventional properties implied by L.S.Z. theory:

(1) Steinmann relations: these linear relations between the functions of S^n appear in the L.S.Z. theory as consequences of the algebraic properties of the Heavyside function $\theta(x)$ [$\theta(x) = 0$ for $x < 0$ and $\theta(x) = 1$ for $x > 0$].

(2) Support properties in x -space resulting from the locality of the fields and from the invariance by translation.

(3) Temperateness.

¹ Part of these lectures were originally to be given by V. Glaser.

These two properties (2. and 3.) imply the analyticity of the Laplace transforms of the functions of S^n in certain tubes of the k -space, and the fact that they are bounded in modulus by some polynomials in these tubes.

(4) Spectral conditions: they are essential to prove that all the functions of the set S^n (considered in k -space) are various branches of a single analytic function $H_n(k)$; this is the origin of the crossing property, but only holds off the mass shell at the beginning.

(5) For $n \geq 4$ the boundary values of $H_n(k)$ at certain real points coincide with the scattering amplitudes, when k tends to these points inside certain tubes of the primitive domain: this is the geometrical content of the reduction formulae.

The assumption of the Lorentz invariance of the functions will never be used as far as analytic completion is concerned. Furthermore, we shall never use the unitarity equations, and therefore the domains which we compute will only remain in the so-called "physical sheet" whenever they happen to intersect the mass shell.

Let us now point out that the junction between the axioms of WIGHTMAN [8] and our starting point has not been achieved in full generality and rigor: it is a hard problem to prove that a set S^n can always be associated in the sense of distributions with any set of fields satisfying the Wightman axioms². However, this connection can be made easier, although highly non-trivial (see the work of HEPP [9]) if one slightly releases in some way the conditions imposed on the set S^n (in particular the form of the supports in x -space). We shall discuss briefly in the end what can be the consequences – as far as our results are concerned – of such a modification of the assumptions satisfied by the set S^n . It will turn out that the domains of analyticity which we compute remain unchanged, while the increase properties of the functions could *a priori* be affected. These considerations will lead us to note that our results can also take place in the axiomatic theory of ARAKI [10], where fields are replaced by localized bounded operators. At any rate, we shall leave aside these problems in the following, and from now on, assume the existence of the set S^n with its above-listed properties.

The algebra of the generalized retarded functions

The functions of the sets $S^n (n \geq 2)$ can be associated with certain elements of an abstract Lie algebra which clearly exhibits the structure of the Steinmann relations.

Then, new sets of functions F^n can be introduced (with some arbitrariness) which have the following properties:

- (1) Every function $s_\alpha \in S^n$ is a sum of certain functions $f_\beta \in F^n$; namely

$$s_\alpha = \pm \sum_{\beta} c_{\alpha\beta} f_\beta \quad (1)$$

where $c_{\alpha\beta} = 0$ or 1 .

² This proof has been carried out independently by R. Stora and by H. Epstein and V. Glaser in the case $n = 3$.

(2) The Steinmann relations become identities when the functions s_α are expressed according to formula (1).

(3) Every function $f_\beta(x) \in F^n$ has its support contained in a simplicial cone s_β of x -space.

(4) $\forall_\alpha$, support $r_\alpha = \bigcup_{\substack{\beta: \\ c_{\alpha\beta}=1}} \text{support } f_\beta$.

By exploiting the support properties of the f'_β 's which are nicer than those of the r'_α 's, we can obtain some new analyticity for the Laplace transforms in k -space. These properties are not due to any process of analytic completion, but purely to the algebraic exploitation of the Steinmann relations together with locality.

Among the results, one can in particular define the most general type of "retarded functions"³, by taking new linear combinations of the f'_β 's which are analytic in all possible tubes of k -space whose bases are "cells" in q -space ($q = \text{Im } k$): by "cell" we mean any cone in q -space defined by prescrib-

ing simultaneous conditions of the type $\sum_{i \in I} q_i \in V^+ \text{ or } V^-$ for all possible partial

sums of the four-vectors q_i . All these functions satisfy certain generalized spectral conditions so that they are new branches of the same analytic function $H_n(k)$.

Analytic completion

(1) By applying a global theorem of analytic completion to the above-defined domains, one can prove that $H_n(k)$ is analytic in certain larger tubes, except at the points of these tubes belonging to any "cut" of the form

$$\left(\sum_{i \in I} p_i \right)^2 = M_i^2 + \rho \quad (\forall \rho \geq 0). \quad (I \text{ is any subset of the set of indices } \{1, 2, \dots, n\}.)$$

This situation will be fully illustrated in the case of the four-point function. However, all these domains still lie, unfortunately, off the mass shell.

(2) Some analyticity on the mass shell has been obtained for the four-point function (including the old results of dispersion relations).

(a) For any reaction $A+B \rightarrow C+D$, there exists a complex cut neighbourhood of the physical region where the corresponding four-point function $H_n(k)$ is analytic.

(b) For any couple of crossed reactions $A+B \rightarrow C+D$ and $A+\bar{C} \rightarrow B+\bar{D}$ and every negative value of their common momentum transfer t , $H_4(k)$ is analytic in a Lorentz invariant region whose image in the s -plane is the outside of a circle, minus the cuts $s = s_0 + \rho$ ($\forall \rho \geq 0$) $u = u_0 + \rho'$ ($\forall \rho' \geq 0$). All the points of this region are actually points of analyticity of $H_4(k)$ with respect to all variables.

By putting together (a) and (b), a crossing path between any couple of physical regions can be easily drawn in the s, t, u -plane and this is valid

³ These functions were primitively defined by RUELE [4] by another method.

for stable particles with arbitrary masses, the only restriction being the assumption of a strictly positive minimal mass in the theory.

Now, in order to complete the proof of the crossing relation, it has to be shown that the relevant boundary values of the analytic continuation of $H_4(k)$ on the mass shell are actually the physical amplitudes. In fact, this was only assumed to hold when the limit was taken in the original tubes (see assumption (5), so that a somewhat technical work on distributions has to be applied to get this result; this technique will not be described here.

Before explaining all those steps in some detail, we shall describe in the first chapter the mathematical tools which we used, especially concerning analytic completion.

2. MATHEMATICAL TOOLS

Notations

The Lorentz scalar product $k \cdot x$ of real or complex four-vectors $k = (k^{(0)}, k^{(1)}, k^{(2)}, k^{(3)})$ and $x = (x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$ is defined by $k \cdot x = k^{(0)}x^{(0)} - k^{(1)}x^{(1)} - k^{(2)}x^{(2)} - k^{(3)}x^{(3)}$, $|x|$ denotes the Euclidean norm: $(x^{(0)2} + x^{(1)2} + x^{(2)2} + x^{(3)2})^{\frac{1}{2}}$

$$V^+ = \{x \in \mathbb{R}^4; x^2 \equiv x \cdot x > 0; x^{(0)} \geq 0\}$$

$\bar{V}^+$ is the closure of V^+ .

The Fourier transform in $\mathbb{R}^{4n}$ is defined by:

$$\mathcal{F}g(p) = \int g(x) e^{i \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i} dx_1 \dots dx_n$$

where $p = (p_1, \dots, p_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Analyticity in tubes

The following well-known theorem is the origin of the analyticity properties of the retarded functions. For its proof, see for instance Refs. [11] and [12].

Theorem 1: If T is a tempered distribution on the space $\mathbb{R}^{4n}$ such that: support $T = \bar{V}_n^+ = \{x_i \in V^+; 1 \leq i \leq n\}$, then its Fourier transform $\mathcal{F}(T)$ is the boundary value of a function $f(k)$ which is analytic in the tube:

$$\mathcal{T}_n^+ = \{k_i = p_i + iq_i; q_i \in V^+; 1 \leq i \leq n\}.$$

Furthermore, for every $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in V_n^+$, there exists a polynomial $P_\eta(k)$ such that the following inequality holds in the set $\{k; k - i\eta \in \mathcal{T}_n^+\}$:

$$|f(k)| < |P_\eta(k)|. \quad (1)$$

Conversely if $f(k)$ is a function analytic in $\mathcal{T}_n^+$, which satisfies (1) for all $\eta \in \mathcal{T}_n^+$ and tends to a tempered distribution f_p on the real, then the reciprocal Fourier transform of f_p is a tempered distribution whose support is included in V_n^+ .

In this theorem, the boundary value of $f(k)$ on the real has to be taken in the following sense: for every test function $\varphi(p) \in S_p$, and for $q = \text{Im } k$ tending to zero inside any closed⁴ cone contained in V_n^+ one has:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \int f(p+iq) \varphi(p) dp = f_p(\varphi).$$

Actually, the latter property can be equivalently expressed by a certain majorization of $|f(k)|$ (different from (1)) thanks to the following theorem.

Theorem 2: Let $f(z_1 \dots z_n)$ be a function of n complex variables which is analytic in a tube:

$$\mathcal{T}_\epsilon = \{z; \text{Im } z \in \mathcal{C}; |\text{Im } z|^2 < \epsilon\}$$

where $\mathcal{C}$ denotes an open cone in $\mathbb{R}^n$ with vertex at the origin. Then:

(i) A necessary and sufficient condition for $f(z)$ to tend to a distribution when $\text{Im } z \rightarrow 0$ is that for every closed⁵ cone $\Gamma \subset \mathcal{C}$ and every bounded open set $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ the following inequality holds for $\text{Re } z \in \Omega$ $\text{Im } z \in \Gamma$

$$|f(z)| < \frac{C}{|\text{Im } z|} r. \quad (2)$$

In this formula the constants C and r depend on Γ and Ω .

(ii) A necessary and sufficient condition for $f(z)$ to tend to a tempered distribution, is that for every closed⁵ cone $\Gamma \subset \mathcal{C}$, the following inequality holds for $\text{Im } z \in \Gamma$

$$|f(z)| < \frac{P(\text{Re } z)}{|\text{Im } z|^r}. \quad (3)$$

In this formula, the constant r and the polynomial P depend on Γ .

⁴ Closed in $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

⁵ Closed in $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Techniques of analytic completion

We list a number of theorems and lemmas; the theorems are classical, and the lemmas are special applications of these theorems which we are interested in.

Theorem 3: (Edge-of-the-wedge theorem⁶)

Let $f_1(z)$ and $f_2(z)$ be two functions of n complex variables $(z_1, \dots, z_n) = z$ which are respectively analytic in the domains:

$$\mathcal{D}_1 = \{z; \operatorname{Im} z \in \mathcal{C}_1; |\operatorname{Im} z| < \epsilon; \operatorname{Re} z \in \Omega\}$$

$$\mathcal{D}_2 = \{z; \operatorname{Im} z \in \mathcal{C}_2; |\operatorname{Im} z| < \epsilon; \operatorname{Re} z \in \Omega\}$$

where $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ denote two disjoint convex cones in $\mathbb{R}^n$ with vertex at the origin, and Ω is an open sphere in $\mathbb{R}^n$.

If $f_1(z)$ and $f_2(z)$ tend to distributions on Ω when $\operatorname{Im} z \rightarrow 0$, and if these distributions coincide, then there exists a function $f(z)$ which is analytic in a domain

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{W} \quad (\text{see Fig. 1})$$

and coincides with f_1 in $\mathcal{D}_1$ and with f_2 in $\mathcal{D}_2$. The domain $\mathcal{W}$ has the following form:

$$\mathcal{W} = \left\{ z; \operatorname{Re} z \in \Omega; \frac{\operatorname{Im} z}{C(\operatorname{Re} z)} \in \mathcal{C} \right\}.$$

In this definition, $\mathcal{C}$ denotes the convex hull of the set $(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) \cap \{|\operatorname{Im} z| < \epsilon\}$ and $C(\operatorname{Re} z)$ is < 1 and proportional to the distance of $\operatorname{Re} z$ to the boundary of Ω .

If the cones $\mathcal{C}_1$ and $-\mathcal{C}_2$ intersect each other, it is clear that $\mathcal{C}$ contains a sphere centered at the origin, so that $f(z)$ is actually analytic at all the points of Ω . We also note that the domain $\mathcal{W}$ is independent on the special couple of functions f_1 and f_2 which we were given, but only depends on the geometrical situation.

In practice, we are given a number of functions f_i , respectively analytic in tubes $\mathcal{T}_i$ with conical imaginary bases, and these f_i 's have boundary values which coincide on a real region $\mathcal{R}$. Then theorem 3 provides a domain $\mathcal{D}$ in which the f_i 's have a common analytic continuation f ; in general, $\mathcal{D}$ is not a natural domain of holomorphy and has an envelope of holomorphy $\mathcal{H}(\mathcal{D})$. From now on, we shall call "quasi-domains" the regions in $\mathbb{C}^n$ of the type $(\cup \mathcal{T}_i) \cup \mathcal{R}$ and we shall refer to $\mathcal{H}(\mathcal{D})$ as the envelope of holomorphy of the quasi-domain $(\cup \mathcal{T}_i) \cup \mathcal{R}$. In certain cases such envelopes of holomorphy

⁶ For the generalized form which we quote here, see EPSTEIN [13].

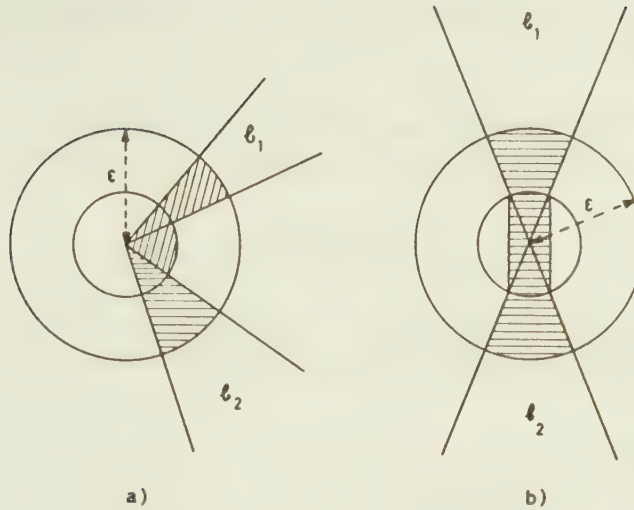


Fig. 1

The section of the edge-of-the-wedge domain in the space of $\text{Im } z$ for fixed $\text{Re } z \in \Omega$

(a) $\mathcal{C}_1 \cap (-\mathcal{C}_2)$ is empty

(b) $\mathcal{C}_1 \cap (-\mathcal{C}_2)$ is not empty

can be completely constructed by using in a number of ways the so-called "tube theorem" (see for instance WIGHTMAN [14]). We shall use in particular the following refinements of the tube theorem.

Theorem 4⁷: ("flattened tube theorem")

If a domain $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^n$ contains a tube region of the form $\mathcal{T} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{T}_i$, where:

$$\mathcal{T}_i = \{z; 0 \leq \text{Im } z_i < 1; \text{Im } z_j = 0; j \neq i; 1 \leq j \leq n\},$$

then the envelope of holomorphy of $\mathcal{D}$ contains the convex hull $\hat{\mathcal{T}}$ of $\mathcal{T}$:

$$\hat{\mathcal{T}} = \left\{ z; 0 \leq \text{Im } z_i < 1; 1 \leq i \leq n; \sum_{i=1}^n \text{Im } z_i < 1 \right\}$$

Remark: if one subtracts from this domain $\mathcal{D}$ a regular analytic manifold $\mathcal{M}$ of the form $\mathcal{M} = \{z; z_1 = i\epsilon\}$, it can be shown* that a very similar result holds, namely: the envelope of holomorphy of $\mathcal{D} - \mathcal{M}$ contains the set $\hat{\mathcal{T}} - \mathcal{M}$.

By applying some conformal mappings to the domains occurring in theorem 4; one can generate the envelopes of holomorphy of a number of domains and obtain for instance the following results:

Lemma 1. In the space $\mathbb{C}^4$, let $\mathcal{T}^\pm$ be the tubes $\{k = p + iq \in \mathbb{C}^4; q \in V^\pm\}$ and let $\mathcal{R}$ be the real region in $\mathbb{R}^4$ defined by $\{p \in \mathbb{R}^4, p^2 < m^2\}$ (m being

⁷ The first versions of this theorem were proved by B. MALGRANGE and M. ZERNER and were actually stronger than the one which we give here.

* See Appendix C

a positive number). The envelope of holomorphy of the quasidomain $\mathcal{T}^+ \cup \mathcal{T}^- \cup \mathcal{R}$ is the whole space $\mathbb{C}^4$ minus the analytic hypersurface $\{k : k^2 = m^2 + \rho; \forall \rho \geq 0\}$.

Lemma 2: (see Ref. [6]) In the space $\mathbb{C}^{4n}$ of n complex four vectors $k_i = p_i + iq_i (1 \leq i \leq n)$ we consider the tubes:

$$\mathcal{T}_1 = \{k; q_i \in V^+; 1 \leq i \leq n\},$$

$$\mathcal{T}_2 = \{k; q_1 \in V^-; q_1 + q_j \in V^+; 2 \leq j \leq n\}$$

and the real region:

$$\mathcal{R} = \{p \in \mathbb{R}^{4n}; p_1^2 < m^2\}.$$

Then the envelope of holomorphy of the quasi-domain $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{R}$ is the tube $\mathcal{T}_1$ the convex envelope of $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, minus the analytic hypersurface $\{k \in \mathbb{C}^{4n}; k_1^2 = m^2 + \rho; \forall \rho \geq 0\}$.

We also need the following global property:

Theorem 5: If $\mathcal{D}_1$ and $\mathcal{D}_2$ are two domains in $\mathbb{C}^n$ such that $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ is a pseudo-convex domain, then every function f analytic in $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ can be written as a sum $f = f_1 + f_2$, where f_1 is analytic in $\mathcal{D}_1$, and f_2 in $\mathcal{D}_2$.

This theorem is a very special case of the solution of the so-called "generalized first Cousin problem"; a proof of this property (using cohomology theory) can be found for instance in the reference [15].

A trivial application of theorem 5 gives the following lemma:

Lemma 3. If $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ is pseudo-convex, then

$$\mathcal{H}(\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2) = \mathcal{H}(\mathcal{D}_1) \cap \mathcal{H}(\mathcal{D}_2).$$

We are now going to establish a result which will be crucial for the proof of the crossing property; we shall first prove:

Lemma 4. In the space $\mathbb{C}^2$ of the variables $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ we consider a domain D which contains the following sets: (See Fig. 2)

$$S_1 = \{(z_1, z_2); z_1 \in]-a, 0]; |z_2| < \epsilon; z_2 \neq 0\}$$

$$S_2 = \{(z_1, z_2); z_1 \in D_1; |z_2| < \epsilon; (\pi + \alpha) < \arg z_2 < 2\pi - \alpha; z_2 \neq 0\}.$$

Here a, ϵ are positive numbers, $0 < \alpha < \pi/2$ and D_1 is a set of the form

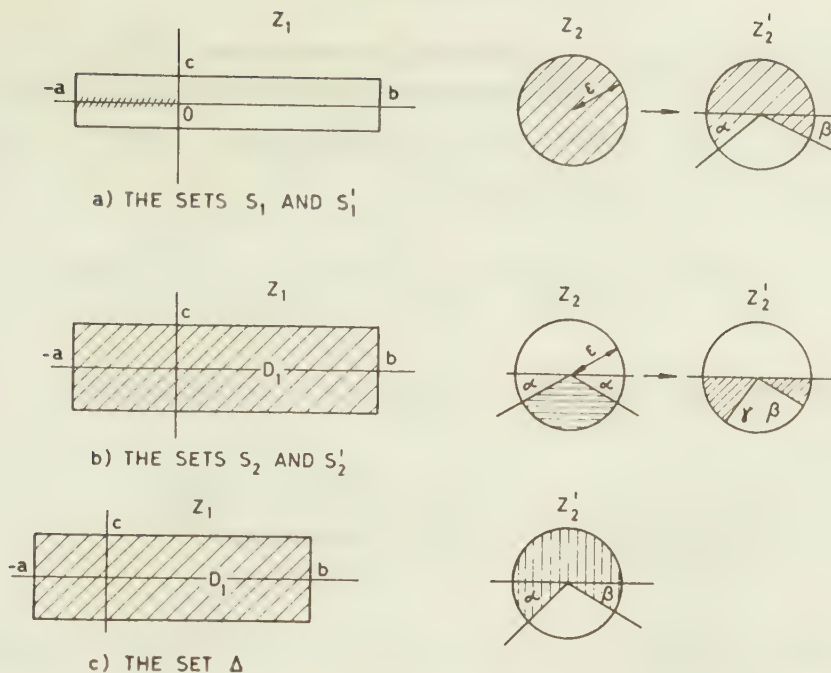


Fig. 2

Illustration of lemma 4

$\{z_1; -a < x_1 < b; |y_1| < c\}$ ($b, c > 0$). Then the envelope of holomorphy $\mathcal{H}(D)$ of D contains a neighbourhood in $\mathbb{C}^2$ of the set

$$\{(z_1, z_2); z_1 \in D_1, z_2 = 0\},$$

deprived of the points of this set.

Proof: We first treat the case $\alpha = 0$. Let $Z_1 = \phi(z_1)$ be a conformal mapping which maps the domain $\{D_1 -]-a, 0]\}$ onto the strip $0 < Y_1 = \text{Im } Z_1 < 1$, in such a way that the line $Y_1 = 0$ is the image of the segment $]-a, 0]$ (this segment has to be "unfolded" by the mapping ϕ , in the same way as is the set $x < 0$ by the mapping $Z = \sqrt{z}$).

We also put: $Z_2 = \ln(z_2 - \epsilon)/(z_2 + \epsilon)$. In the new variables $Z_i = X_i + iY_i$ ($i = 1, 2$) the sets S_1, S_2 are respectively transformed into the sets

$$T_1 = \left\{ Y_1 = 0, \frac{\pi}{2} < Y_2 < \frac{3\pi}{2} \right\} - \{Z_2 = i\pi\},$$

$$T_2 = \left\{ 0 < Y_1 < 1; \pi < Y_2 < \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

Then, in view of the remark which follows theorem 4, $\mathcal{H}(D)$ contains the image of the convex hull of $T_1 \cup T_2$ minus the manifold $Z_2 = i\pi$ and it can be easily checked that this image contains a neighbourhood of the set $\{z_1 \in D_1, z_2 = 0\}$ deprived of the points of this set.

Case $\alpha \neq 0$: We can always assume that D is contained in the set

$A = \{(z_1, z_2); z_1 \in D_1; |z_2| < \epsilon\}$; now we make the conformal mapping

$z_2' = [\exp i\alpha\pi/(\pi+2\alpha)]z_2^{\pi/(\pi+2\alpha)}$ which transforms the sets $S_1 - \{\arg z_2 = 3\pi/2\}$ and $S_2 - \{\arg z_2 = 3\pi/2\}$ respectively into

$$S_1' = \{z_1 \in]-a, 0]; |z_2'| < \epsilon'; -\beta < \arg z_2' < \pi + \beta; z_2' \neq 0\}$$

$$S_2' = \{z_1 \in D_1; |z_2'| < \epsilon'; -\beta < \arg z_2' < \pi + \beta; \operatorname{Im} z_2' < 0\}$$

here:

$$\beta = \frac{\pi(\pi - 2\alpha)}{2(\pi + 2\alpha)}, \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right), \text{ and } \epsilon' = \epsilon^{\frac{\pi}{\pi+2\alpha}}.$$

Let Δ be the domain $\{z_1 \in D_1; -\beta < \arg z_2' < \pi + \beta; |z_2'| < \epsilon'; z_2' \neq 0\}$ (See Fig. 2).

We consider the image D' of $D - \{\arg z_2 = 3\pi/2\}$ in the space of the variables (z_1, z_2') and define $D_0 = D' \cup (\bigcap \Delta - \{z_2' = 0\})$. $\bigcap \Delta$ denoting the complementary set of Δ in $\{z_1 \in D_1; |z_2'| < \epsilon'\}$.

Then one checks that $D_0 \cap \Delta = D'$, and that $D_0 \cup \Delta = \{z_1 \in D_1; |z_2'| < \epsilon'; z_2' \neq 0\}$, which is a natural domain of holomorphy.

Thus in view of lemma 3, we have:

$$\mathcal{H}(D') = \mathcal{H}(D_0) \cap \mathcal{H}(\Delta) = \mathcal{H}(D_0) \cap \Delta.$$

Now, D_0 fulfils the assumptions of the present lemma in the case $\alpha = 0$; therefore $\mathcal{H}(D_0)$ contains a neighbourhood of the set $\{z_1 \in D_1, z_2' = 0\}$ deprived of the points of this set.

Therefore, $\mathcal{H}(D')$ contains the intersection of Δ with a neighbourhood of $\{z_2' = 0\}$, and by going back to the original variables z_1, z_2 , we get the desired result.

We now consider in $\mathbb{C}^2$ two analytic hypersurfaces

$$F = \{(z_1, z_2); f(z_1, z_2) = \rho; \forall \rho \geq 0\},$$

$$G = \{(z_1, z_2); g(z_1, z_2) = \sigma; \forall \sigma \geq 0\},$$

which fulfil the following conditions:

(i) the functions f and g are analytic in the domain $A = \{(z_1, z_2); z_1 \in D_1, |z_2| < \epsilon\}$; furthermore for every fixed $z_1 \in D_1$ f and g are univalent as functions of z_2 in $|z_2| < \epsilon$.

(ii) Inside A the analytic manifolds $f(z_1, z_2) = 0$ and $g(z_1, z_2) = 0$ coincide with the set $\{z_2 = 0\}$.

(iii) The hypersurface F lies in $A \cap \{x_2 \geq 0\}$ and divides this region into two simply connected parts according to the sign of $\operatorname{Im} f$; the same is

assumed to hold for G and for the region $A \cap \{x_2 \leq 0\}$. Thus the hypersurface $F \cup G$ divides A into two simply connected open regions (see Fig. 3) A^+ and A^- . For instance:

$$A^+ = \{z_1 \in D_1; |z_2| < \epsilon; x_2 \geq 0, \operatorname{Im} f > 0\},$$

$$U \{z_1 \in D_1; |z_2| < \epsilon; x_2 \leq 0, \operatorname{Im} g > 0\}.$$

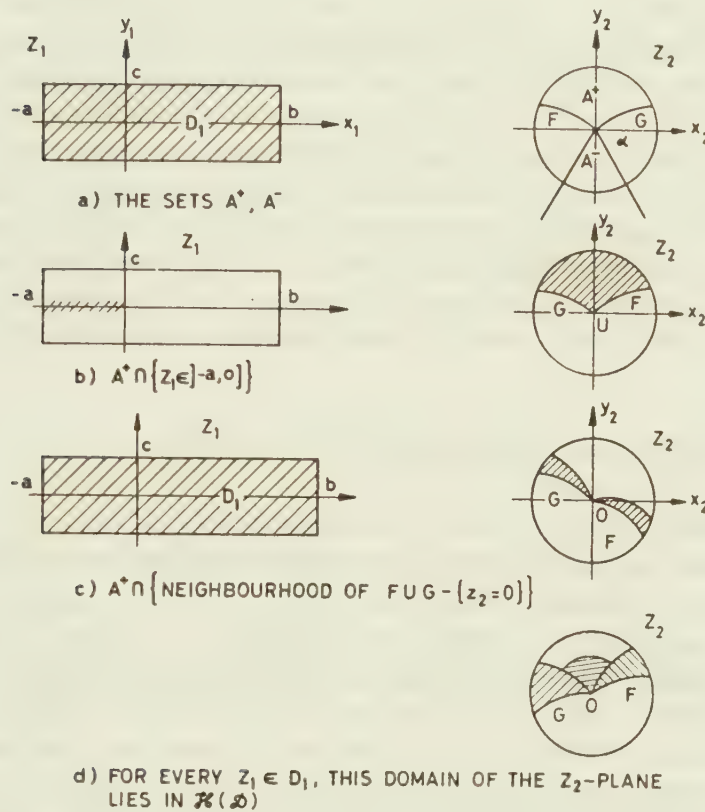


Fig. 3

Illustration of lemma 5

(iv) There exists an angle α ($0 < \alpha < \pi/2$) such that the "sector" $\{(z_1, z_2); z_1 \in D_1; \pi + \alpha < \arg z_2 < 2\pi - \alpha; |z_2| < \epsilon; z_2 \neq 0\}$ neither intersects F nor G .

Then the following lemma holds:

Lemma 5: Let $\mathcal{D}$ be a subdomain of A which contains the two following sets:

(a) $A^+ \cap \{z_1 \in [-a, 0]\}$ (b) the intersection of A^+ with an open neighbourhood of $F \cup G - \{z_2 = 0\}$ (see Fig. 3). Then the envelope of holomorphy $\mathcal{H}(\mathcal{D})$ of $\mathcal{D}$ contains the intersection of A^+ with a neighbourhood of the set $\{z_1 \in D_1, z_2 = 0\}$.

Proof: We consider the domain $\mathcal{D}'$ which is the union of $\mathcal{D}$ with the set $A^+ \cup F \cup G - \{z_2 = 0\}$. It is clear (see Fig. 3) that

$$\begin{aligned} A^+ \cap \mathcal{D}' &= \mathcal{D} \\ A^+ \cup \mathcal{D}' &= A - \{z_2 = 0\} \end{aligned}$$

which is a natural holomorphy domain. Thus in view of lemma 3, we have:

$$\mathcal{H}(\mathcal{D}) = \mathcal{H}(\mathcal{D}') \cap \mathcal{H}(A^+).$$

We notice that $\mathcal{H}(A^+) = A^+$ since the analytic hypersurfaces F and G and their common corner $\{z_2 = 0\}$ are natural boundaries (in view of the "Kantensatz"). Now the domain $\mathcal{D}'$ fulfils the conditions of lemma 4; thus $\mathcal{H}(\mathcal{D})$ contains the intersection of A^+ with a neighbourhood of the set $\{z_1 \in D_1, z_2 = 0\}$ which is the desired result. We can notice that in this proof, the fact that the hypersurfaces are analytic does not play any role (except for the remark that $\mathcal{H}(A^+) = A^+$); actually the lemma could be derived in the same way in the case of non analytic hypersurfaces, provided that the topological situation be respected. However, we have chosen to describe this special case, because it occurs in the proof of crossing which we shall give in part 4.

3. THE GENERALIZED RETARDED FUNCTIONS

If one treats the Wightman "functions" $\langle 0 | A_{i_1}(x_{i_1}) \dots A_{i_n}(x_{i_n}) | 0 \rangle$ as actual functions (instead of more general temperate distributions), one can define certain expressions which are products of the vacuum expectation values of the multiple commutators $\langle 0 | [A_{i_1}(x_{i_1}), \dots, A_{i_n}(x_{i_n})] | 0 \rangle$ by step functions $\theta(x_i^0 - x_j^0)$; here x_i^0, x_j^0 denote the time components of the four-vectors $x_i, x_j \in \mathbb{R}^4$, and we have $\theta(t) = 0$ for $t < 0$; $\theta(t) = 1$ for $t > 0$.

Certain linear combinations of those expressions, called retarded or advanced functions, occur in the reduction formulae of L.S.Z. For every integer $n \geq 4$ one can introduce a slightly more general set S^n of such combinations which we call the Steinmann monomials (see in (3) the first systematic approach to the algebra of these objects in axiomatic quantum field theory). Three kinds of properties of the set S^n can be exhibited from that formalism:

- (i) Algebraic structure,
- (ii) Support properties,
- (iii) Spectral conditions.

In the following we assume that the sets S^n are composed of tempered distributions which still satisfy exactly the same properties i, ii and iii (the support properties having now to be understood in the sense of distributions).

The algebraic structure of the sets S^n and the Steinmann relations

We consider the formal associative algebra $\mathcal{A}$ on the ring of the integers which is generated by two kinds of elements: a (denumerable) set of non-

commuting elements A_i ($i = 1, 2, \dots, n, \dots$) and a (denumerable) set of commuting elements θ_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n, \dots$) which all commute with the A_i 's. We add by convenience the following rule: every monomial $A_{i_1} \dots A_{i_n}$ which contains at least twice the same index is put equal to zero. In $\mathcal{A}$ we are going to define certain derivations $A_j \uparrow$, $A_j \downarrow$ (i.e., linear operations D satisfying the following condition

$$D(x \cdot y) = D x \cdot y + x \cdot D y, \quad \forall x, y \in \mathcal{A};$$

such a derivation is uniquely determined once we are given its action on any monomial $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}$.

Let us define

$$A_j \uparrow (A_{i_1} \dots A_{i_n}) = \sum_{p=1}^n \theta_{ji_p} A_{i_1} \dots [A_j, A_{i_p}] \dots A_{i_n},$$

$$A_j \downarrow (A_{i_1} \dots A_{i_n}) = - \sum_{p=1}^n \theta_{i_p j} A_{i_1} \dots [A_j, A_{i_p}] \dots A_{i_n},$$

$$\hat{A}_j (A_{i_1} \dots A_{i_n}) = \sum_{p=1}^n A_{i_1} \dots [A_j, A_{i_p}] \dots A_{i_n} = [A_j, A_{i_1} \dots A_{i_n}].$$

$\hat{A}_j$ is the "inner" derivation associated with the elements A_i of $\mathcal{A}$. Let us now assume that the elements θ_{ij} satisfy the following additional relations:

$$\theta_{ij} + \theta_{ji} = 1, \quad \forall i, j \quad (1)$$

$$\theta_{ij} \theta_{kj} - \theta_{ij} \theta_{ki} - \theta_{kj} \theta_{ik} = 0, \quad \forall i, j, k \quad (2)$$

which also imply:

$$\theta_{ji} \theta_{jk} - \theta_{ji} \theta_{ik} - \theta_{jk} \theta_{ki} = 0, \quad \forall i, j, k \quad (3)$$

All these relations are verified by the step function $\theta(x_i^0 - x_j^0)$. Then it can be easily seen that the relations (2) and (3) are respectively equivalent to the commutation rules

$$[A_i \uparrow, A_j \uparrow] = 0, \quad \forall i, j \quad (4)$$

$$[A_i \downarrow, A_j \downarrow] = 0, \quad \forall i, j \quad (5)$$

and that the relation (1) implies

$$A_i \uparrow - A_i \downarrow = \hat{A}_i, \quad \forall i \quad (6)$$

Let us call $\mathcal{M}^n$ the subset of $\mathcal{A}$ which contains all the elements of the form $A_{i_n} \uparrow A_i, \uparrow \dots A_{i_{n-1}} \uparrow A_{i_n}$, where the symbol $\uparrow$ denotes either $\uparrow$ or $\downarrow$. These elements generate a linear subspace $\mathcal{L}^n$ of $\mathcal{A}$.

Our assumption concerning the algebraic structure of the sets S^n can be formulated as follows:

Assumption 1. We consider for every $n > 1$ a set of tempered distributions S^n (on $\mathbb{R}^{4n}$) which generates a linear subspace of distributions R^n , and enjoys the following property: there exists a linear mapping $\mathcal{J}$ from $\mathcal{L}^n$ onto R^n , such that the elements of S^n are the images by $\mathcal{J}$ of the elements of $\mathcal{M}^n$.

We shall see that the set $\mathcal{M}^n$ is not a basis of $\mathcal{L}^n$; the linear relations between the elements of $\mathcal{M}^n$ are called the Steinmann relations. Assumption 1 expresses the fact that identical relations are satisfied by the corresponding elements of S^n (of course, in a special theory, the elements of S^n could satisfy other special relations which could be independent of the Steinmann relations).

The set of derivations $A_i \uparrow, A_i \downarrow$ generates a Lie algebra of derivations $\mathcal{D}$ on $\mathcal{A}$, which contains the sets of inner derivations as an ideal; besides, it is clear that every subspace $\mathcal{L}^n$ of $\mathcal{A}$ is isomorphic to the corresponding set of inner derivations and can therefore be identified with a subspace of $\mathcal{D}$.

It can also be seen that the Lie algebra $\mathcal{D}$ is isomorphic to an abstract Lie algebra D on the ring of the integers which can be constructed as follows: one considers a denumerable set of elements a_i^+, a_i^- ($i = 1, 2, \dots, n, \dots$); this set generates a free Lie algebra to which we impose the following additional rules:

$$(1) \quad [a_i^+, a_j^+] = [a_i^-, a_j^-] = 0, \quad \forall i, j, \quad (7)$$

$$(2) \quad \text{Any monomial containing at least twice the same index is equal to zero.}$$

(In more mathematical language, this would be "the quotient of the free Lie algebra by a certain ideal".) Clearly, the canonical isomorphism $\mathcal{J}$ from D onto $\mathcal{D}$ is defined by the correspondence

$$a_i^+ \xrightarrow{\mathcal{J}} A_i \uparrow$$

$$a_i^- \xrightarrow{\mathcal{J}} A_i \downarrow$$

so that the equations (7) correspond to Eqs. (4) and (5). By putting $a_i = a_i^+ - a_i^-$, we also have in view of Eq. (6):

$$a_i \xrightarrow{\mathcal{J}} A_i.$$

The elements of $\mathcal{M}^n$ are the images by $\mathcal{J}$ of the monomials of the following type:

$$[a_{i_1}^+ [a_{i_2}^+ [\dots [a_{i_{n-2}}^+ [a_{i_{n-1}}^-, a_{i_n}^+]] \dots]]].$$

These monomials form a set $M^n \subset D$ and generate a linear subspace D^n of D .

If (I^+, I^-) denotes a couple of subsets of positive integers, we can clearly decompose D^n as the direct sum:

$$D^n = \bigoplus_{(I^+, I^-)} D_{I^+ I^-}^n$$

where $D_{I^+ I^-}^n$ denotes the subspace of D^n generated by the set $M_{I^+ I^-}^n$ of monomials which contain n^+ elements a_i^+ with $i \in I^+$ and n^- elements a_j^- with $j \in I^-$ (n^+ denotes the number of elements of I^+ and we have $n = n^+ + n^-$).

The set $M_{I^+ I^-}^n$ is not a basis for $D_{I^+ I^-}^n$: actually, the monomials of $M_{I^+ I^-}^n$ satisfy all the linear relations which are consequences of the Jacobi identity and of the special relations (7). These are (up to an isomorphism) the Steinmann relations. The simplest example of such relations is obtained for $n = 4$, $n^+ = n^- = 2$ ($I^+ = \{1, 2\}$, $I^- = \{3, 4\}$). Here, $M_{I^+ I^-}^4$ contains four elements which satisfy one relation, namely:

$$\begin{aligned} & [a_2^+, [a_4^-, [a_3^-, a_1^+]]] - [a_4^-, [a_2^+ [a_3^-, a_1^+]]] \\ &= [[a_2^+, a_4^-], [a_3^-, a_1^+]] = [a_1^+, [a_3^-, [a_2^+, a_4^-]]] - [a_3^- [a_1^+ [a_2^+, a_4^-]]]. \end{aligned}$$

Or correspondingly in $\mathcal{M}_{I^+ I^-}^n$:

$$A_2 \uparrow A_4 \downarrow A_3 \downarrow A_1 - A_4 \downarrow A_2 \uparrow A_1 \uparrow A_3 = -A_1 \uparrow A_3 \downarrow A_4 \downarrow A_2 + A_3 \downarrow A_1 \uparrow A_2 \uparrow A_4$$

and in S^4 :

$$a_{12} - r_{34} = -a_{21} + r_{43}. \quad (8)$$

The graphic Lie algebra Λ and the resolution of the Steinmann relations

We shall outline the proof of the following property:

For every n , there exists a set F^n of tempered distributions such that:

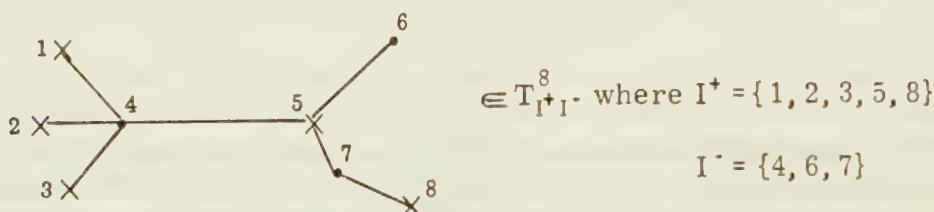
(i) Any elements $s_\alpha \in S^n$ can be put into the form:

$$s_\alpha = (-1)^{n^-} \sum_{\beta} c_{\alpha\beta} f_\beta, \quad f_\beta \in F^n, \quad c_{\alpha\beta} = 0 \text{ or } 1 \quad (9)$$

(ii) The Steinmann relations are identically satisfied by the expressions (9) of the distributions s_α .

To that purpose, we define a new Lie algebra Λ on the ring of the integers, as follows:

Let $T_{I^+I^-}^n$ be the set of simply-connected graphs or "trees" whose vertices are labelled by the elements of the sets I^+ , I^- , and which are such that every line of the tree connects a vertex $i \in I^+$ with a vertex $j \in I^-$. Graphically the vertices $i \in I^+$ are represented by a cross $\times_i$ and the vertices $j \in I^-$ by a point j . For example:



We consider the free vector space Λ (on the ring of the integers) generated by the sum T of all the sets $T_{I^+I^-}^n$, and put on Λ a structure of Lie algebra by defining the following product: with every couple of trees $t_1 \in T_{I_1^+I_1^-}^{n_1}$, $t_2 \in T_{I_2^+I_2^-}^{n_2}$, one associates:

$$[t_1, t_2] = \sum_{\substack{i_1 \in I_1^+ \\ j_2 \in I_2^-}} \text{tree } t_1 \text{ --- } t_2 \quad - \sum_{\substack{j_1 \in I_1^- \\ i_2 \in I_2^+}} \text{tree } t_1 \text{ --- } t_2 \quad (10)$$

Each term of the right member is a tree belonging to $T_{I_1^+ \cup I_2^+, I_1^- \cup I_2^-}^{n_1+n_2}$. We also add the rule: $[t_1, t_2] = 0$, if one vertex at least is common to t_1 and t_2 . It can be easily verified that this product is anticommutative and that the Jacobi identity holds true.

We define a unique homomorphism ℓ of the Lie algebra $\mathcal{D}$ into Λ by imposing the conditions:

$$\ell(a_i^+) = \underset{i}{\times} \in T^1.$$

$$\ell(a_i^-) = \underset{i}{\bullet} \in T^1.$$

For instance, applying the rule (10) we get:

$$\begin{aligned} \ell([a_1^+, a_2^-]) &= \underset{1}{\times} \text{---} \underset{2}{\bullet} , \\ \ell([a_1^+ [a_2^+, a_3^-]]) &= 1 \underset{1}{\times} \text{---} \underset{2}{\times} \text{---} \underset{3}{\bullet} , \\ \ell([a_1^+, [a_2^-, [a_3^+, a_4^-]]) &= \underset{1}{\times} \text{---} \underset{2}{\times} \text{---} \underset{3}{\times} \text{---} \underset{4}{\bullet} + \underset{1}{\times} \text{---} \underset{2}{\times} \text{---} \underset{3}{\times} \text{---} \underset{4}{\bullet} . \end{aligned}$$

In this way we can compute $\ell(m_\alpha)$ for any monomial $m_\alpha \in M_{I^+I^-}^n$ and obtain an expression of the form:

$$\ell(m_\alpha) = (-1)^{n^-} \sum_{\beta} c_{\alpha\beta} t_\beta \text{ with } c_{\alpha\beta} = 0 \text{ or } 1. \quad (11)$$

(In this formula the summation extends to all trees $t_\beta \in T_{I^+I^-}^n$.)

Now the important and non-trivial point (which we shall not prove here) is that D is actually isomorphic to its image $\ell(D)$; in other words, the only linear relations which the elements $\ell(m_\alpha)$ (expressed by (11)) are submitted to are isomorphic to the Steinmann relations. This proves the compatibility of the system (9), i.e., the possibility of determining (with a certain arbitrariness) the unknown set of distributions F^n , when the coefficients $c_{\alpha\beta}$ of the right member of the equations (9) are the same as those occurring in the equations (11).

Let us consider the simplest example: $n^+ = n^- = 2 \quad n = 4$.

We have: $a_{12} = f_{23} + f_{24}$ with the correspondence: $f_{13} \leftrightarrow 1 \times \text{---} \underset{4}{\bullet} \text{---} \underset{2}{\times} \text{---} 3$.

$$a_{21} = f_{13} + f_{14}$$

$$f_{14} \leftrightarrow 1 \times \text{---} \underset{3}{\bullet} \text{---} \underset{2}{\times} \text{---} 4$$

$$r_{34} = f_{14} + f_{24}$$

$$f_{23} \leftrightarrow 2 \times \text{---} \underset{4}{\bullet} \text{---} \underset{1}{\times} \text{---} 3$$

$$r_{43} = f_{13} + f_{23}$$

$$f_{24} \leftrightarrow 2 \times \text{---} \underset{3}{\bullet} \text{---} \underset{1}{\times} \text{---} 4$$

(The right members clearly satisfy the Steinmann relation (8), which is the only condition of compatibility of the system).

Support properties in x-space

From the axiom of translation invariance, the distributions of the set S^n are supposed to be defined on the quotient of $\mathbb{R}^{4n}$ by the subspace $\{x_i = t; t \in \mathbb{R}^4\}$. In other words, this quotient space X can be described by $n-1$ independent four vectors of the form $x_i - x_j (1 \leq i, j \leq n)$.

With every tree t_β in the set T^n , one can associate a simplicial cone C_β in X by the following rule: C_β is defined by the $n-1$ conditions $x_i - x_j \in \bar{V}^+$ corresponding to all the lines $\overset{\times}{\underset{i}{\text{---}}}\overset{\bullet}{\underset{j}{\text{---}}}$ of the tree t_β ($\bar{V}^+$ is the closed forward light cone). For example

$$t_\beta = \overset{\times}{\underset{1}{\text{---}}}\overset{\bullet}{\underset{2}{\text{---}}}\overset{\times}{\underset{3}{\text{---}}}\overset{\bullet}{\underset{4}{\text{---}}} \rightarrow C_\beta = \{x_1 - x_2 \in \bar{V}^+; x_3 - x_2 \in \bar{V}^+; x_3 - x_4 \in \bar{V}^+\}$$

Let s_α be any element of S^n , and m_α the corresponding monomial in M^n ; we have Eq.(10):

$$\ell(m_\alpha) = \sum_{\beta} c_{\alpha\beta} t_\beta$$

Then let us define the cone Σ_α in X by

$$\Sigma_\alpha = \bigcup_{\beta: c_{\alpha\beta}=1} C_\beta.$$

We make the following assumption:

Assumption 2. For every index α , Σ_α is the support of the distribution $s_\alpha \in S^n$. The reason for this assumption is that, when S^n is a set of functions, then it results from the axiom of locality that Σ_α is the support of s_α . The point is that, without locality, one only obtains support conditions which are expressed in terms of the time components of the vectors, and this is due to the step functions $\theta(x_i^0 - x_j^0)$ which we have introduced. The locality assumption $[A_i(x_i), A_j(x_j)] = 0$ if $(x_i - x_j)^2 < 0$ implies that all the conditions given by the supports of the θ -function can be replaced by the corresponding Lorentz invariant conditions; (for instance $(x_i^0 - x_j^0) > 0$ is replaced by $x_i - x_j \in V^+$). This fact is clearly illustrated in the case $n=2$; the retarded function $\theta(x_1^0 - x_2^0)[A(x_1), A(x_2)]$ has the support $\Gamma = \{x_1 - x_2 \in \bar{V}^+\}$.

Now, starting from Assumption 2, it is possible to prove the following lemma:

Lemma. One can always determine a set of tempered distributions F^n enjoying the properties of the preceding section (i.e., $s_\alpha = \sum_{\beta} c_{\alpha\beta} f_\beta$, $\forall s_\alpha \in S^n$),

in such a way that the support of every $f_\beta \in F^n$ be the simplicial cone C_β (associated with the tree t_β corresponding to f_β).

Example: $n=4$, $n^+ = n^- = 2$. We can draw a symbolic picture (see Fig.4) which exhibits the support of a_{12} (in dashed lines) as being the union of the supports of f_{23} and f_{24} .

The primitive tubes of analyticity in k -space

By writing the bilinear form $p \cdot x = \sum_{i=1}^n p_i x_i$ as follows:

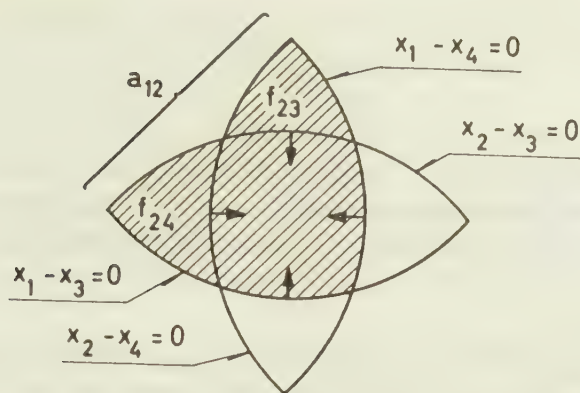


Fig. 4

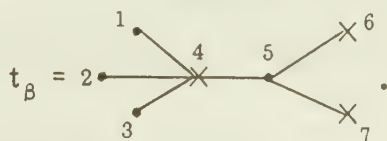
Symbolic picture exhibiting the support of a_{12} (in dashed lines) as being the union of the supports of f_{23} and f_{24}

$$\sum_{i=1}^{n-1} p_i (x_i - x_n) + \left(\sum_{i=1}^n p_i \right) x_n$$

we can see that translation invariance implies the following property in p -space. The Fourier transforms of all the distributions $s_\alpha \in S^n$ (respectively $f_\beta \in F^n$) are tempered distributions of the form $\tilde{s}_\alpha \delta(p_1 + p_2 + \dots + p_n)$ (respectively $\tilde{f}_\beta \delta(p_1 + p_2 + \dots + p_n)$), where the $\tilde{s}_\alpha$'s and the $\tilde{f}_\beta$'s are tempered distributions defined on the subspace $P = \{p_1 + \dots + p_n = 0\}$ of the space of the n four vectors $p_1, p_2, \dots, p_n$.

We are now in a position to apply the first theorem of part 2; according to this theorem, the tempered distributions $\tilde{s}_\alpha(p)$ and $\tilde{f}_\beta(p)$ are the boundary values of functions which are analytic in tubes of the space $K = \{k = p + iq; k_1 + k_2 + \dots + k_n = 0\}$. Let us still denote $\tilde{s}_\alpha(k)$ (respectively $\tilde{f}_\beta(k)$) the analytic function which tends to $\tilde{s}_\alpha(p)$ (respectively $\tilde{f}_\beta(p)$), and let $\tilde{\Sigma}_\alpha$ (respectively $\tilde{C}_\beta$) be the dual cone of Σ_α (respectively C_β) in the space $Q = \{q; q_1 + q_2 + \dots + q_n = 0\}$. Then $\tilde{s}_\alpha(k)$ is analytic in the tube with imaginary basis $\tilde{\Sigma}_\alpha$, and $\tilde{f}_\beta(k)$ in the tube with basis $\tilde{C}_\beta$. Furthermore, the invoked theorem also implies that these analytic functions are bounded by some polynomials in the tubes where they are defined.

The rules for constructing the cone $\tilde{C}_\beta$ are the following: each line $\times \xrightarrow{j} k$ of the tree t_β defines a partition of the set of its vertices into two subsets J and K , such that $j \in J$ and $k \in K$. Example:



The line $\times \xrightarrow{4} 5$ defines the partition $J = \{1, 2, 3, 4\}$, $K = \{5, 6, 7\}$. So, with each line $\times \xrightarrow{j} k$, we can associate the unique condition:

$$\sum_{i \in J} q_i = - \sum_{i \in K} q_i \in V^+. \quad (12)$$

The cone $\tilde{C}_\beta$ is defined by $n-1$ conditions which are all the conditions (12) corresponding to all the lines of the tree t_β . (This rule can be easily obtained from those which define C_β by writing the bilinear form $p \cdot x$ in a suitable manner.)

The cones $\tilde{\Sigma}_\alpha$ belong to a general set of cones which we call "cells" and which we are going to define now. We first define "cells" in the $(n-1)$ -dimensional space Q^0 of the time components q_i^0 of the four vectors q_i (We have: $\sum_{i=1}^n q_i^0 = 0$). In Q^0 , we consider all the planes defined by conditions of the type:

$$\sum_{j \in J} q_j^0 = 0, \quad (13)$$

where J is any subset of the set $\{1, 2, \dots, n\}$. These planes define in Q^0 a number of cones Γ_λ^0 (centered at the origin) which are defined by prescribing definite signs to all the sums (13)); these cones Γ_λ^0 are the cells. The union of all the cells cover Q^0 (up to a set of zero measure) and they are all disjoint. In general, these cells are not simplicial (i.e., they can have more than $(n-1)$ plane faces); such cases occur as soon as $n \geq 5$.

Now we can associate to every cell Γ_λ^0 in Q^0 a cell Γ_λ in the space Q , by replacing all the conditions $\sum_{j \in J} q_j^0 \geq 0$ by the corresponding conditions

$\sum_{j \in J} q_j \in V^+$. It is clear that the union of the cells Γ_λ is far from exhausting

the whole space Q since the vectors $\sum_{j \in J} q_j$ can never be space-like inside the cells.

We also introduce the following large cones in Q space which we call "orchestras", because they generalize the "Steinmann quartets" occurring in the case $n=4$. With every partition of the set $\{1, 2, \dots, n\}$ into two subsets I^+ , I^- , we associate the orchestra:

$$\pi_{I^+ I^-}^n = \{q; q_i \in V^+; \forall i \in I^+, q_j \in V^-; \forall j \in I^-; \}.$$

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n = 0$$

Each orchestra $\pi_{I^+ I^-}^n$ contains a lot of cells Γ_λ .

Then, the functions $\tilde{f}_\beta$ and $\tilde{s}_\alpha$ enjoy the following properties:

(a) For every $\tilde{s}_\alpha$, the corresponding cone $\tilde{\Sigma}_\alpha$ is a cell (which is actually simplicial). If $s_\alpha \in S_{I+I}^n$, then $\tilde{\Sigma}_\alpha \subset \pi_{I+I}^n$.

(b) For every $\tilde{f}_\beta \in F_{I+I}^n$, the corresponding simplicial cone $\tilde{C}_\beta$ belongs to the orchestra π_{I+I}^n .

(c) For every $\tilde{s}_\alpha \in S_{I+I}^n$, the cell $\tilde{\Sigma}_\alpha$ is the intersection of all the simplicial cones $\tilde{C}_\beta$ which contain it; all these cones $\tilde{C}_\beta$ belong to the orchestra M_{I+I}^n , and they correspond to all the indices β such that $C_{\alpha\beta} = 1$ in the relation

$$s_\alpha = (-1)^n \sum_{\beta} C_{\alpha\beta} f_\beta. \quad (9)$$

The property (c) leads to the introduction of the full set of "generalized retarded functions". With every cell Γ_λ of the orchestra π_{I+I}^n we associate the linear combinations:

$$\tilde{n}_\lambda = (-1)^n \sum_{\beta} k_{\lambda\beta} \tilde{f}_\beta. \quad (14)$$

such that

$$k_{\lambda\beta} = 1 \text{ if } \Gamma_\lambda \subset \tilde{C}_\beta \subset \pi_{I+I}^n,$$

$$k_{\lambda\beta} = 0 \text{ otherwise.}$$

Clearly each function r_λ is analytic in the tube whose basis is the cell Γ_λ since this tube is the intersection of all the tubes where the f_β occurring in (14) are analytic.

Generalized spectral conditions and the n-point function $\Pi_n(k)$

Two cells of the space Q are called adjacent if there exists only one partial sum $\sum_{j \in J} q_j$ which satisfies different conditions in the two cells (i.e. $\sum_{j \in J} q_j \in V^+$ in one cell and $\sum_{j \in J} q_j \in V^-$ in the other cell); in other words the corresponding plane $\sum_{j \in J} q_j = 0$ is a common $4(n-2)$ -dimensional face to the two cells.

Then the following algebraic property can be shown: For any λ let $\rho_\lambda = (-1)^n \sum_{\beta} k_{\lambda\beta} t_\beta \in \Lambda^n$ be the linear combination of trees associated with

the cell $\Gamma_\lambda \subset \pi_{I^+I^-}^n$. If Γ_{λ_1} and Γ_{λ_2} are adjacent cells, then there always exist elements of lower order $\rho_{\lambda_1} \in \Lambda^{n_1}$, $\rho_{\lambda_2} \in \Lambda^{n_2}$ associated with cells $\Gamma_{\lambda_1} \subset \pi_{I_1^+I_1^-}^{n_1}$, $\Gamma_{\lambda_2} \subset \pi_{I_2^+I_2^-}^{n_2}$, such that one has

$$\rho_{\lambda_1} - \rho_{\lambda_2} = [\rho_{\lambda_1}, \rho_{\lambda_2}]. \quad (15)$$

(Here the bracket means the Lie-product in the Lie algebra Λ of the trees.) From Eq. (15), we deduce by a recurrent argument, that all the elements ρ_λ belong to the subspace $\ell(D)$ of Λ (generated by the Steinmann monomials $\ell(m_\alpha)$). Translating this result into the space of the distributions, we see that the Fourier transform $r_\lambda(x)$ of any $\tilde{r}_\lambda(p)$ (of order n) belongs to the space R^n generated by the set of Steinmann monomials S^n . Furthermore, in the case where the set S^n is composed of functions, the equations (15) can be translated into the space R^n as follows:

$$r_{\lambda_1}(x) - r_{\lambda_2}(x) = \langle 0 | [R_{\lambda_1}(x_j), R_{\lambda_2}(x_k)] | 0 \rangle. \quad (16)$$

In this formula the indices j belong to a subset J of $\{1, 2, \dots, n\}$ and the indices k belong to the subset K which is the complementary of J .

These subsets J and K are precisely those which occur in the equation of the common face to Γ_{λ_1} and Γ_{λ_2} $\left(\sum_{j \in J} q_j = - \sum_{k \in K} q_k = 0 \right)$; $R_{\lambda_1}(x_j)$ denotes the

linear combination of products of field operators whose vacuum expectation value $r_{\lambda_1}(x_j)$ is the generalized retarded function (of lower order) associated with the element ρ_{λ_1} ; $R_{\lambda_2}(x_k)$ is defined in the same way.

By inserting a complete set of intermediate states $|n\rangle$ into the right-hand side of the Eq. (16), and taking the Fourier transforms, we obtain the following spectral condition

$$\tilde{r}_{\lambda_1}(p) - \tilde{r}_{\lambda_2}(p) = 0 \quad (17)$$

for all p such that

$$\left(\sum_{j \in J} p_j \right)^2 \equiv \left(\sum_{k \in K} p_k \right)^2 < M_J^2$$

Here the mass M_J denotes the lowest mass of the states $|n\rangle$ such that

$$\langle 0 | R_{\lambda_1}(x_j) | n \rangle \neq 0,$$

and

$$\langle 0 | R_{\lambda_2}(x_k) | n \rangle \neq 0.$$

Since we assumed the set S^n to be composed of tempered distributions, we shall now consider this result as an assumption and set:

Assumption 3. For every couple of adjacent cells $\Gamma_{\lambda_1}, \Gamma_{\lambda_2}$, having in common the plane $\sum_{j \in J} p_j = - \sum_{k \in K} p_k = 0$ the two distributions $\tilde{r}_{\lambda_1}(p)$ and $\tilde{r}_{\lambda_2}(p)$ coincide in a region of the form

$$\left\{ p; \left(\sum_{j \in J} p_j \right)^2 = \left(\sum_{k \in K} p_k \right)^2 < M_J^2 \right\}.$$

Now we can apply the generalized edge-of-the wedge theorem, from which follows that any couple of functions $\tilde{r}_{\lambda_1}(k), \tilde{r}_{\lambda_2}(k)$ corresponding to adjacent cells are branches of a single analytic function. Since two arbitrary cells can be connected by a finite chain of adjacent cells, we obtain that all the generalized retarded functions $\tilde{r}_\lambda(k)$ (of order n) are branches of a single analytic function $H_n(k)$ which is called the n -point function in momentum-space.

We also note that the region $\mathcal{R}^n$ defined as the set of the real points p such that all the conditions $\left(\sum_{j \in J} p_j \right)^2 < M_J^2$ are fulfilled simultaneously is the

region where all the distributions $\tilde{r}_\lambda(p)$ coincide. Therefore, by applying the edge-of-the wedge theorem to any couple of functions $\tilde{r}_{\lambda_1}(k), \tilde{r}_{\lambda_2}(k)$ whose tubes of analyticity are opposite, we get the following result:

There exists a complex neighbourhood $\mathcal{N}(\mathcal{R})$ of the region $\mathcal{R}$, where the n -point function $H_n(k)$ is analytic. Thus the function $H_n(k)$ is analytic in the domain

$$\Delta = \mathcal{N}(\mathcal{R}) \cup \left(\bigcup_{\lambda} \mathcal{T}_{\lambda} \right),$$

where $\mathcal{T}_{\lambda}$ denotes the tube whose basis is the cell Γ_{λ} in the space Q , namely:

$$\mathcal{T}_{\lambda} = \{ k; q \in \Gamma_{\lambda} \}.$$

The domain Δ can be considered as the primitive domain of analyticity of $H_n(k)$, i.e. the domain which results directly from the exploitation of assumptions, 1, 2 and 3.⁸

It has been shown in part 2 that if a domain is obtained by applying the local edge-of-the-wedge theorem to the union of several tubes, this domain is not in general a natural domain of holomorphy; so the problem arises of computing the envelope of holomorphy of the domain Δ .

⁸ Actually, the domain Δ is smaller than the domain Δ' which is obtained by applying the edge-of-the-wedge theorem to all couples of adjacent tubes, but one can show that Δ' lies in $\mathcal{N}(\Delta)$; so, in principle, one does not lose information when only taking into account the couples of opposite tubes.

4. ANALYTIC COMPLETION

In part 3, we have seen that the n -point function $H_n(k)$ is analytic in a certain primitive domain Δ^n , which is a neighbourhood of the quasi-domain $\Delta^n = \mathcal{R} \cup (\cup_\lambda \mathcal{T}_\lambda)$. Some general remarks can be made concerning the envelope of holomorphy of this quasi-domain (which we can note indifferently $\mathcal{H}(\Delta^n)$ or $\mathcal{H}(\Delta^n)$).

(a) If all the threshold masses M_j are strictly positive, then the quasi-domain Δ^n is star-shaped with respect to the origin; this means that for every number α such that $0 \leq \alpha \leq 1$ the homotetic quasi-domain $\alpha \Delta^n$ is contained in Δ^n . Then one can show that $\mathcal{H}(\Delta^n)$ is also star shaped with respect to the origin and that it is a schlicht domain in $\mathbb{C}^n$.

(b) Without using any assumption concerning the Lorentz covariance of the n -point function, one can show that the domain $\mathcal{H}(\Delta^n)$ is necessarily invariant under the complex Lorentz group (i.e. under all the transformations: $k_i \rightarrow \Lambda k_i; 1 \leq i \leq n; \Lambda \in L^+(\mathbb{C})$). This results from the fact that the quasi-domain Δ^n is invariant under all the real Lorentz transformations and that it contains certain crucial real points (for instance the set of "Jost points", defined as follows:

$$\{p; (\sum \lambda_i p_i)^2 < 0; \forall \lambda_i > 0; 1 \leq i \leq n\}.$$

(c) Let us consider all the analytic hypersurfaces

$$\mathcal{C}_J = \{k; (\sum_{j \in J} k_j)^2 = M_J^2 + \rho; \forall \rho \geq 0\}$$

here, as in part 2. J denotes any subset of the set of indices $\{1, 2, \dots, n\}$.

An elementary calculation shows that every complex point in $\mathcal{C}_J$ is such that $(\sum_{j \in J} q_j)^2 < 0$ ($q_j = \text{Im } k_j$).

Therefore $\mathcal{C}_J$ does not intersect any tube $\mathcal{T}_\lambda$, since in every $\mathcal{T}_\lambda$ all the partial sums $\sum_{j \in J} q_j$ have to belong either to V^+ or to V^- . Furthermore, $\mathcal{C}_J$

does not intersect the real region $\mathcal{R}^n$ (by definition of $\mathcal{R}^n$). Thus $\cup \mathcal{C}_J$ does not intersect the quasi-domain Δ^n , and since $\cup \mathcal{C}_J$ is a union of analytic manifolds it does not intersect, either, the envelope of holomorphy $\mathcal{H}(\Delta^n)$.

We can, therefore, assert that $\mathcal{H}(\Delta^n)$ is a schlicht, Lorentz invariant domain in $\mathbb{C}^{4n}$ which is contained in the domain $\hat{\Delta}^n = \mathbb{C}^{4n} - \{\cup \mathcal{C}_J\}$. The fact that the domains $\hat{\Delta}^n$ have a very simple form led physicists to assume such domains of analyticity as a starting point for the S-matrix calculations; for instance the restriction of $\hat{\Delta}^4$ to the mass shell is the domain which was proposed by MANDELSTAM [16].

Unfortunately, the nice property $\mathcal{H}(\Delta^2) = \hat{\Delta}^{2,0}$ cannot be generalized, and it is most probable that in general the domain $\hat{\Delta}^n$ is much larger than $\mathcal{H}(\Delta^n)$. However, we shall show here that certain properties of $\hat{\Delta}^n$ are also enjoyed by $\mathcal{H}(\Delta^n)$.

A nice feature of the domains $\hat{\Delta}^n$ is that, except for the points at infinity, their boundaries are only composed of the analytic hypersurfaces $\mathcal{C}_J$; so the conjecture of analyticity in $\hat{\Delta}^n$ could be completed in a natural way by the assumption that the boundary values of the n -point function at certain points of the $\mathcal{C}_J$'s are equal to the physical amplitudes. Then by making use of unitarity, it would be possible in this framework to perform some analytic continuation across the hypersurfaces $\mathcal{C}_J$, and thus define other Riemann sheets (where one usually locates the poles corresponding to unstable particles); this is the reason why the manifolds $\mathcal{C}_J$ are usually called "cuts". We shall also, from now on, adopt this terminology, and this is justified by the following facts.

One can prove that $\mathcal{H}(\Delta^n)$ is partially bounded by pieces of the hypersurfaces $\mathcal{C}_J$; more precisely, we shall obtain regions of analyticity the form of which is a certain domain deprived of the points which belong to the set $\cup_J \mathcal{C}_J$; the appearance of such regions, which we shall call "cut domains" is a common feature of $\mathcal{H}(\Delta^n)$ and $\hat{\Delta}^n$. Furthermore, if such "cut sub-domains" of $\mathcal{H}(\Delta^n)$ happen to contain physical points on the mass shell (this will be proved here in the case $n = 4$), it is possible to prove that the boundary values of the n -point function at these points is the scattering amplitude. Therefore, certain processes which were used in the conjectural approach can also be applied to a certain extent in the framework of axiomatic field theory; in particular, one can make use of unitarity in order to continue analytically across the "cuts" $\mathcal{C}_J$. Of course, these are further steps of the axiomatic programme which cannot be developed before the essential properties of $\mathcal{H}(\Delta^n)$ have been carried out. Here we shall concentrate on the (partial) computation of $\mathcal{H}(\Delta^n)$ and keep in mind the fact that in this so-called "linear programme", the cuts $\mathcal{C}_J$ appear as inviolable barriers.

Global results (off the mass shell)

Let $\mathcal{T}_{\lambda_1}$ and $\mathcal{T}_{\lambda_2}$ be two tubes whose bases are two adjacent cells Γ_{λ_1} and Γ_{λ_2} (see part 3), and let $\sum_{j \in J} p_j = 0$ be their common face. $\mathcal{H}(\Delta^n)$ contains the envelope of holomorphy of the quasi-domain $\mathcal{T}_{\lambda_1} \cup \mathcal{T}_{\lambda_2} \cup \mathcal{R}_J^n$ where

$$\mathcal{R}_J^n = \{p; \left(\sum_{j \in J} p_j\right)^2 < M_J^2\}.$$

In a number of cases, such a partial envelope of holomorphy can be obtained by direct application of lemma 2 of part 2; the result is a cut domain which is the convex hull of the tube $\mathcal{T}_{\lambda_1} \cup \mathcal{T}_{\lambda_2}$, minus the cut $\mathcal{C}_J$.

⁹ This property is a direct application of the lemma 1 of part 2.

However, the defect of lemma 2 is that it only allows one to derive cut domains which are crossed by a single cut. As soon as we have to deal with a real region $\mathcal{R}$ which is defined by several conditions of the form $\left(\sum_{j \in J} p_j\right)^2 < M_J^2$, it seems much more difficult to establish analogous results.

Nevertheless, we can manage to obtain cut tubes which are crossed by several cuts by taking advantage of the auxiliary set of functions $F^{(n)}$ which we have introduced in part 3. For simplicity, we shall illustrate our argument by treating the case of the four-point function.

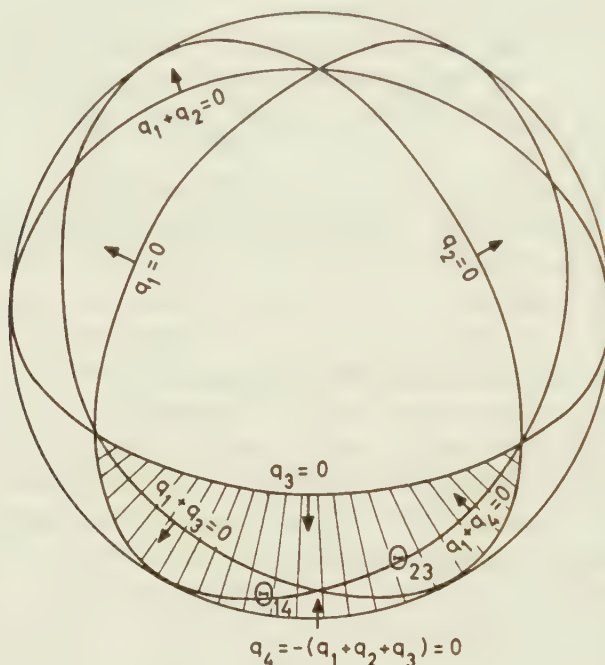


Fig. 5

Representation of the primitive tubes of the four-point function:
this is the section of the space Q^* by a sphere centered at the origin
(only half of the sphere is represented).
The quartet Ξ_{34} is shaded.

The variables are the four-vectors k_1, k_2, k_3, k_4 linked by the relation $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$.

One considers the quartet which is composed of the following primitive tubes (see Fig. 5):

$$T_{12}^+ = \{k; q_2 \in V^-, q_2 + q_3 \in V^+, q_2 + q_4 \in V^+\} \leftrightarrow a_{12}$$

$$T_{21}^+ = \{k; q_1 \in V^-, q_2 + q_3 \in V^-, q_2 + q_4 \in V^-\} \leftrightarrow a_{21}$$

$$T_{34}^- = \{k; q_4 \in V^+, q_2 + q_3 \in V^+, q_2 + q_4 \in V^-\} \leftrightarrow r_{34}$$

$$T_{43}^- = \{k; q_3 \in V^+, q_2 + q_3 \in V^-, q_2 + q_4 \in V^+\} \leftrightarrow r_{43}$$

(Here, the arrows indicate the Steinmann functions which are analytic in the corresponding tubes).

The Steinmann relation $a_{12} + a_{21} = r_{34} + r_{43}$ has been solved by introducing the functions $f_{13}, f_{14}, f_{23}, f_{24}$ such that:

$$a_{12} = f_{23} + f_{24},$$

$$a_{21} = f_{13} + f_{14},$$

$$r_{34} = f_{14} + f_{24},$$

$$r_{43} = f_{13} + f_{23}.$$

The functions f_{ij} are analytic in larger tubes Θ_{ij} (see Fig. 5); for instance:

$$\Theta_{14} = \{k; q_1 \in V^-, q_4 \in V^+, q_1 + q_3 \in V^+\} \leftrightarrow f_{23},$$

$$\Theta_{23} = \{k; q_2 \in V^-, q_3 \in V^+, q_1 + q_3 \in V^-\} \leftrightarrow f_{14}.$$

Now the spectral condition: $a_{12} = r_{34}$ if $(p_1 + p_3)^2 < M_{13}^2$ implies, in view of (1) the similar condition:

$$f_{23} = f_{14} \text{ if } (p_1 + p_3)^2 < M_{13}^2.$$

Therefore by applying lemma 2 to the quasi-domain

$$\Theta_{23} \cup \Theta_{14} \cup \{p; (p_1 + p_3)^2 < M_{13}^2\}$$

we obtain that f_{23} and f_{14} have a common analytic continuation φ_{13} which is analytic in the convex hull of $\Theta_{23} \cup \Theta_{14}$ minus the cut $\mathcal{C}_{13}$. Similarly f_{13} and f_{24} have a common continuation φ_{14} which is analytic in the convex hull of $\Theta_{13} \cup \Theta_{24}$ minus the cut $\mathcal{C}_{14}$. Actually these two convex hulls happen to coincide with the convex hull Ξ_{34} of the whole quartet. If we now refer to Eqs. (1), we obtain that the four-point function $H_4(k)$ can be written as the sum: $H_4(k) = \varphi_{13}(k) + \varphi_{14}(k)$:

Therefore $H_4(k)$ can be analytically continued in the cut tube $\Xi_{34} - \mathcal{C}_{13} - \mathcal{C}_{14}$.

This argument can be generalized to the n -point function, according to the following scheme:

(i) In view of the formulae (14) of part 3, the spectral conditions imply the equality of the boundary values of certain sums of functions $f_\beta \in F^n$ in regions of the form $\mathcal{R}_j^n$.

(ii) Application of lemma 2 allows one to continue analytically the f_β 's in certain large cut tubes (crossed by a single cut).

(iii) Each one of the formulae (14) (see part 3) shows that $H_n(k)$ is analytic in the intersection of the (enlarged) domains of the $\tilde{f}_\beta$'s which occur in this formula. So $H_n(k)$ is analytic in certain cut tubes, crossed with several cuts.

However, it can be checked that all these cut tubes have no point on the mass shell (for instance in the case $n=4$, the tube Ξ_{34} which was obtained above is contained in the tube $\{k; q_1 \in V^-, q_2 \in V^-, q_3 \in V^+, q_4 \in V^+\}$ but

every complex point on the mass shell $\{k; k_i^2 = m_i^2; 1 \leq i \leq 4\}$ is such that $q_i^2 \leq 0$ for $1 \leq i \leq 4$.

Let us add a few words concerning the three-point function. We have six tubes in the primitive domain:

$$T_i^+ = \{k; q_j \in V^+, q_l \in V^+\}, T_i^- = -T_i^+$$

here $k = (k_1, k_2, k_3)$ with $k_1 + k_2 + k_3 = 0$; $i, j, l = 1, 2$ or 3 . The application of lemma 2 yields six larger cut tubes, namely:

$$T_i^{+*} - \mathcal{C}_i \text{ and } T_i^{-*} - \mathcal{C}_i$$

where

$$T_i^{+*} = -T_i^{-*} = \{k; q_j \in V^+, q_l \in V^-\}$$

and

$$\mathcal{C}_i = \{k; k_i^2 = M_i^2 + \rho; \forall \rho \geq 0\}.$$

(This result was first obtained by STREATER [17] in the mass zero case). Taking into account our general remark concerning Lorentz invariance, we obtain analyticity in the cut extended tubes which correspond to the T_i^{+*} . In the mass zero case, this gives an interpretation of certain results which were obtained by KÄLLEN and WIGHTMAN [18] in the space of the invariants, in particular the transmutation of the curves F_{ij} into the F_{ij}^+ 's.

Local results for the three- and four-point functions

By local results we mean the following: one can get new points of analyticity in the neighbourhood of the real by exploiting the fact that our initial domains of analyticity are not locally pseudoconvex at the real points. The edge-of-the wedge theorem is the first example of such a local property. Of course, this exploitation is much less ambitious than the computation of large pieces of the holomorphy envelope. However, it yields interesting results, especially on the mass shell; in the cases $n=3$ and 4 , we get analyticity in cut neighbourhoods of the physical regions, and a proof of the crossing: the latter result can be considered as a local property of analytic completion in the neighbourhood of certain points at infinity.

(a) Cut neighbourhoods of the physical regions:

Let us consider the cut tube $\Xi_{34} - \mathcal{C}_{13} - \mathcal{C}_{14}$ which we have obtained previously in the case $n=4$. $H_4(k)$ is also analytic in the opposite cut tube $\Xi_{12} - \mathcal{C}_{13} - \mathcal{C}_{14}$ ($\Xi_{12} = -\Xi_{34}$).

We now look at the situation in a neighbourhood of a real point P such that

$$P_i^2 = m_i^2 < M_i^2; 1 \leq i \leq 4;$$

$$t = (P_1 + P_3)^2 < M_{13}^2; u = (P_1 + P_2)^2 < M_{12}^2;$$

$$s = (P_1 + P_4)^2 > M_{14}^2;$$

here m_i denotes the (physical) mass of the corresponding stable particle. In the neighbourhood of P , there is only one cut which is present, namely $\mathcal{C}_{14}$. If one chooses a new system of local co-ordinates at P which is composed of $s = (k_1 + k_4)^2$ and of eleven independent components of the vectors, a simple infinitesimal analysis shows that we have analyticity in two domains $\Xi'_{34} - \mathcal{C}'_{14}$ and $\Xi'_{12} - \mathcal{C}'_{14}$ (where $\mathcal{C}'_{14}$ is the set $\{\text{Im } s = 0\}$, and Ξ'_{12} , Ξ'_{34} are the intersection of opposite tubes in the new co-ordinates with a small sphere centered at P).

Then by applying a refinement¹⁰ of the edge-of-the-wedge theorem (see part 2, theorem 3) to the two tubes $\Xi'_{12} \cap \{\text{Im } s > 0\}$ and $\Xi'_{34} \cap \{\text{Im } s > 0\}$ one obtains analyticity in the half $\{\text{Im } s > 0\}$ of a small sphere centered at P . The second half $\{\text{Im } s < 0\}$ of this sphere is obtained in the same way by working with the two tubes

$$\Xi'_{12} \cap \{\text{Im } s < 0\} \text{ and } \Xi'_{34} \cap \{\text{Im } s < 0\}.$$

This proof has been given in more details in our Ref.[6]. Now, in view of our general remark concerning Lorentz invariance, we can describe the above result in the space of the variables s , t , u linked by the relation

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2, \text{ as follows:}$$

We recall that the three "physical regions" in the (s, t, u) -plane are bounded by the three infinite branches of the cubic

$$Q(s, t, u) \equiv \begin{vmatrix} m_1^2 & p_1 \cdot p_2 & p_1 \cdot p_3 \\ p_1 \cdot p_2 & m_2^2 & p_2 \cdot p_3 \\ p_1 \cdot p_3 & p_2 \cdot p_3 & m_3^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ (see Fig.6)}$$

The four-point function is analytic in a Lorentz invariant domain whose image in the s, t, u -plane is a complex neighbourhood of the union of the three physical regions, minus the cuts $\mathcal{C}_{12}$, $\mathcal{C}_{13}$ and $\mathcal{C}_{14}$.

The fact that a connected neighbourhood can be found is the crossing property.

¹⁰ The refinement consists in the fact that the boundary values of the four-point function are only known to coincide when one tends to the real inside the original tubes, which are subdomains of Ξ'_{34} and Ξ'_{12} ; however the theorem still works.

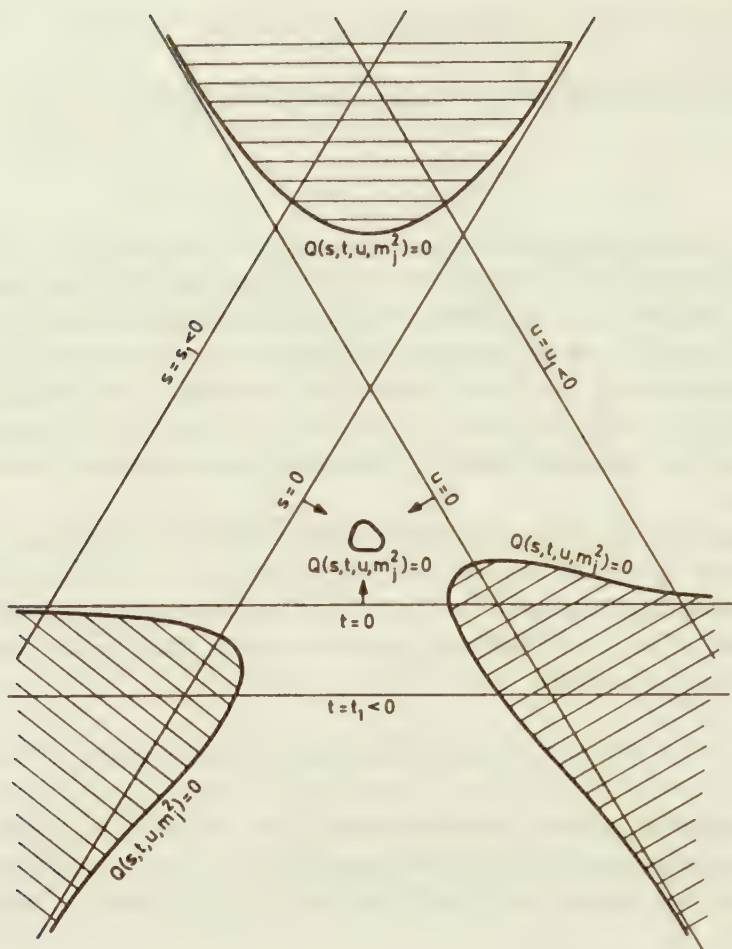


Fig. 6

The physical regions in the (s, t, u) -plane;
in every manifold $t = t_1 < 0$, $s = s_1 < 0$, $u = u_1 < 0$,
one obtains a domain of analyticity - the form of which is shown in Fig. 9b.

(b) The crossing property¹¹

We consider the restriction of the domain of analyticity of the four-point function to the following manifold $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V} \left| \begin{array}{l} k_1 = \left(\pi_1, \frac{m_3^2 - m_1^2 - t}{2\sqrt{-t}}, 0 \right) \\ k_2 = \left(\pi_2, \frac{m_2^2 - m_0^2 + t}{2\sqrt{-t}}, 0 \right) \\ k_3 = \left(-\pi_1, \frac{m_1^2 - m_3^2 - t}{2\sqrt{-t}}, 0 \right) \\ k_4 = \left(-\pi_2, \frac{m_4^2 - m_2^2 + t}{2\sqrt{-t}}, 0 \right) \end{array} \right.$$

¹¹

The proof which we outline here is slightly different from the one which has been published in Ref. [7].

In this representation, the variables are the two-dimensional complex vectors $\pi_j = (\pi_j^{(0)}, \pi_j^{(1)})$ ($j = 1, 2$) whose isotropic co-ordinates are

$$u_j = \pi_j^{(0)} + \pi_j^{(1)},$$

$$v_j = \pi_j^{(0)} - \pi_j^{(1)},$$

$$(\pi_j^2 = \pi_j^{(0)2} - \pi_j^{(1)2} = u_j v_j).$$

In $\mathcal{V}$, the vector $k_1 + k_3 = -(k_2 + k_4)$ is fixed, real and space-like $((k_1 + k_3)^2 = t < 0)$. All the points of $\mathcal{V}$ fulfil the conditions:

$$k_1^2 - k_3^2 = m_1^2 - m_3^2,$$

$$k_2^2 - k_4^2 = m_2^2 - m_4^2,$$

where the numbers m_i are the physical masses; thus the intersection of $\mathcal{V}$ with the mass shell is the submanifold

$$\mathcal{W} = \{k \in \mathcal{V}; k_1^2 - k_2^2 = m_1^2 - m_2^2\}$$

$$= \{(\pi_1, \pi_2); \pi_1^2 - \pi_2^2 = \mu_1^2 - \mu_2^2\},$$

where we have put:

$$\mu_1^2 = m_1^2 - \frac{1}{4t} (t + m_1^2 - m_3^2)^2 = m_3^2 - \frac{1}{4t} (t + m_3^2 - m_1^2)^2$$

$$\mu_2^2 = m_2^2 - \frac{1}{4t} (t + m_2^2 - m_4^2)^2 = m_4^2 - \frac{1}{4t} (t + m_4^2 - m_2^2)^2.$$

In the space $\mathbb{C}^4$ of the variables u_1, v_1, u_2, v_2 the four-point function is analytic in the following cut tubes (see Fig. 7, which is the section of Fig. 5 by the plane $\text{Im}(k_1 + k_3) = 0$).

$$\{\text{Im } u_j > 0; \text{Im } v_j > 0; j = 1, 2\} - \mathcal{C}_{14},$$

$$\{\text{Im } u_j < 0; \text{Im } v_j < 0; j = 1, 2\} - \mathcal{C}_{14},$$

$$\{\text{Im } u_1 > 0, \text{Im } v_1 > 0, \text{Im } u_2 < 0, \text{Im } v_2 < 0\} - \mathcal{C}_{12},$$

$$\{\text{Im } u_1 < 0, \text{Im } v_1 < 0, \text{Im } u_2 > 0, \text{Im } v_2 > 0\} - \mathcal{C}_{12}.$$

In $\mathcal{V}$ the cuts $\mathcal{C}_{12}$ and $\mathcal{C}_{14}$ have the following representation:

$$\mathcal{C}_{12} = \{(u_1 + u_2)(v_1 + v_2) = \mathcal{M}_{12}^2 + \rho; \rho \geq 0\},$$

$$\mathcal{C}_{14} = \{(u_1 - u_2)(v_1 - v_2) = \mathcal{M}_{14}^2 + \rho'; \rho' \geq 0\},$$

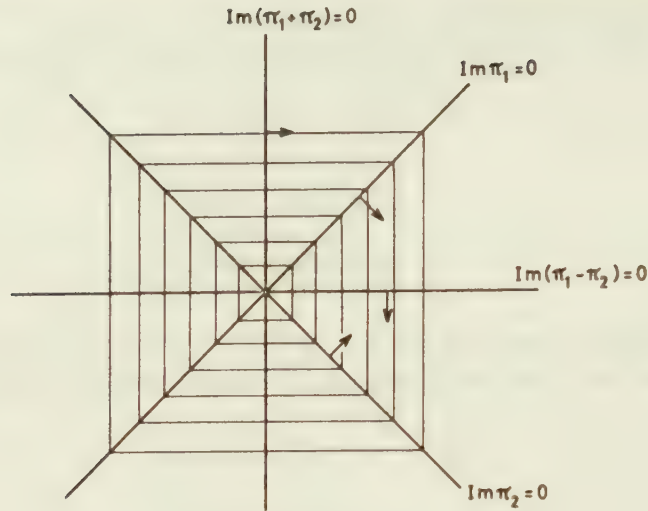


Fig. 7

Symbolic representation of the tubes in Υ .
(Section of Fig. 5 by the plane: $q_1 + q_3 = 0$).

where $\mathcal{M}_{12}$ and $\mathcal{M}_{14}$ are well-defined expressions which contain t and the threshold masses M_{12} , M_{14} .

Let us now take as new variables u_2 , v_2 , u_1 , $v_1' = -1/v_1$. This change of variables leaves the previous tubes invariant, while the cuts $\mathcal{C}_{12}$, $\mathcal{C}_{14}$ become respectively:

$$\mathcal{C}'_{12} = \left\{ \frac{(u_1 + u_2)(1 - v_1' v_2)}{v_1'} + \mathcal{M}_{12}^2 \leq 0 \right\},$$

$$\mathcal{C}'_{14} = \left\{ \frac{(u_1 - u_2)(1 + v_1' v_2)}{v_1'} + \mathcal{M}_{14}^2 \leq 0 \right\}.$$

We now consider the two following sets of real points:

$$A_{b,\epsilon} = \{ u_2 = v_2 = \mu_2; v_1' > 0; u_1 + b v_1' > 0; |u_1|^2 + |v_1'|^2 < \epsilon \}$$

$$B_{b,\epsilon} = \{ u_2 = v_2 = \mu_2; v_1' < 0; u_1 + b v_1' < 0; |u_1|^2 + |v_1'|^2 < \epsilon \}$$

(See Fig. 8), where b and ϵ are positive numbers.

It can be seen that for ϵ small enough and b smaller than a certain quantity $\mathcal{M}_1(t, M_1, M_3) > \mu_1$, the set $A_{b,\epsilon}$ belongs to a single cut, namely $\mathcal{C}'_{14}$ and the set $B_{b,\epsilon}$ also belongs to a single cut, namely $\mathcal{C}'_{12}$. Therefore we can apply to the previous cut tubes the same local procedure as in (a) in order to obtain analyticity in cut neighbourhoods of $A_{b,\epsilon}$ and $B_{b,\epsilon}$. Here the important point consists in the evaluation of the size of these neighbourhoods when one tends to the point $u_1 = v_1' = 0$: by using a technique which is very close to the edge-of-the-wedge theorem, one can prove that every point in $A_{b,\epsilon}$ or $B_{b,\epsilon}$ is the center of a small cut sphere of analyticity, the size of which is studied in Appendix C.

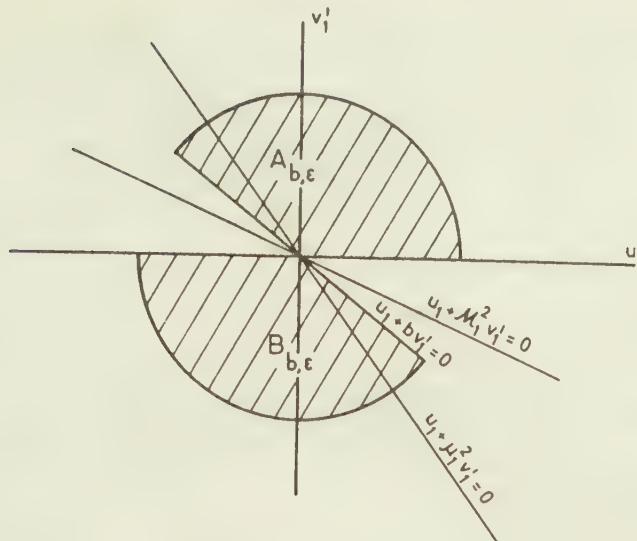


Fig. 8

Two sets of real points $A_{b, \epsilon}$ and $B_{b, \epsilon}$ where b and ϵ are positive numbers

Let us now look at the intersection of this domain by the manifolds $\mathcal{L}_3 = \{u_1 + \xi v_1' = 0; u_2 = v_2 = \mu_2\}$ where ξ is complex and such that: $|\text{Im } \xi| < c$, $-a < \text{Re } \xi < b$ (here b is the positive number occurring in the definition of $A_{b, \epsilon}$ which we choose $> \mu_1$; a and c are positive and sufficiently small numbers). It can be checked* that the assumptions of lemma 5 of part 2 are fulfilled, with $z_1 = \xi$, $z_2 = v_1'$ and the cuts $\mathcal{C}_{12}$, $\mathcal{C}_{14}$ playing the same role as the hypersurfaces F and G . In particular the fact that one has analyticity in a region of the form:

$-a < \xi < 0$, $\text{Im } v_1' \neq 0$ comes for instance from the following cut tube (in the original variables):

$$\{\text{Im}(u_1 + u_2) > 0, \text{Im}(v_1 + v_2) > 0, \text{Im}(u_1 - u_2) > 0, \text{Im}(v_1 - v_2) > 0\} - \mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_4$$

and from its opposite.

It results from lemma 5 that for every ξ in its domain of variation, the restriction of the four-point function to the manifold $\mathcal{L}_\xi$ is analytic in a cut neighbourhood of the point $v_1' = 0$.

In particular, for $\xi = \mu_1^2$ we obtain analyticity in a region of the form:

$$\{u_2 = v_2 = \mu_2; u_1 + \mu_1^2 v_1' = 0; |v_1'| < \epsilon'\} - \mathcal{C}_{12} - \mathcal{C}_{14}$$

(see Fig. 9a).

But the manifold $\mathcal{L}_{\mu_1^2} = \{u_1 + \mu_1^2 v_1' = 0; u_2 = v_2 = \mu_2\}$ is closely connected to the conventional s -plane (taken for a fixed negative value of the momentum transfer t , and for physical values of the masses); in fact the variables v_1' and s are linked by the formula:

$$s = (k_1 + k_4)^2 = (\mu_1^2 v_1' + \mu_2) \left(\frac{1}{v_1'} + \mu_2 \right) + \frac{(m_1^2 - m_3^2 + m_2^2 - m_0^2)^2}{4t}$$

* See Appendix C

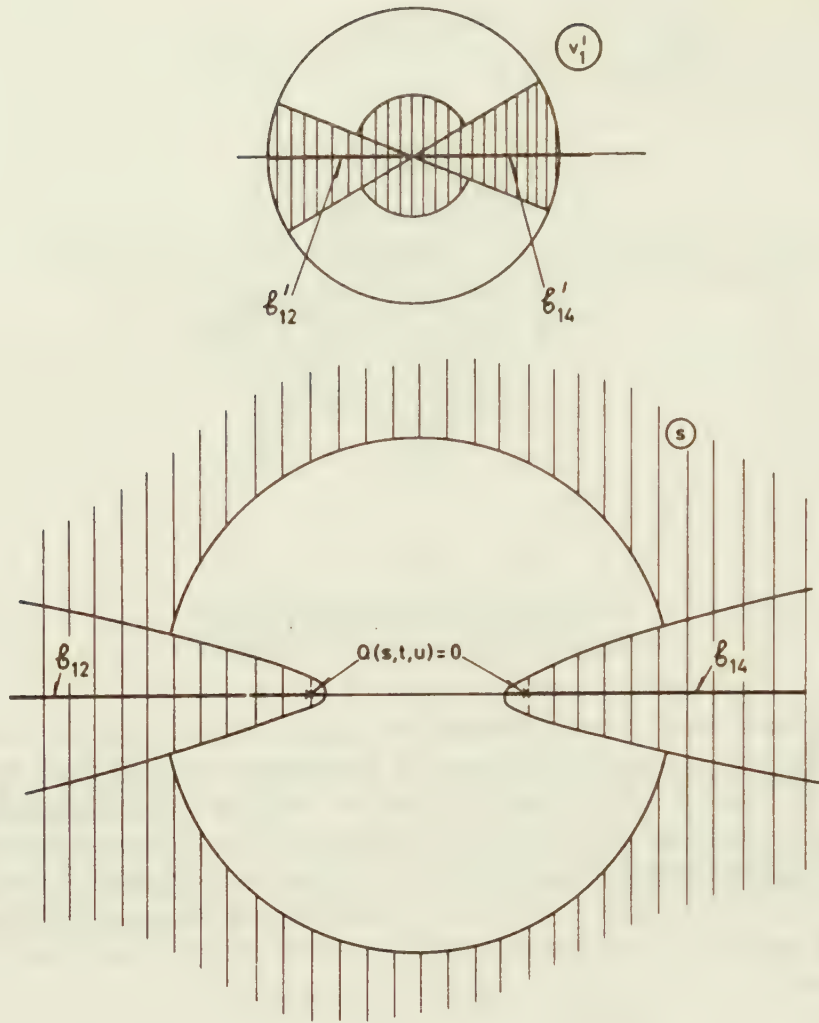


Fig. 9

The crossing domain for the four-point function in the manifold $\mathcal{L}_\mu^1$
(i. e. : t fixed and negative)

- a) in the complex plane of v_1^i
 - b) in the complex plane of s ;
- here the cut neighbourhoods of the physical regions have also been represented.
(All the shaded regions are regions of analyticity.)

so that the neighbourhood of $v_1^i = 0$ corresponds to the neighbourhood of $s = \infty$. Therefore we have obtained analyticity in s , for every fixed $t < 0$ in a neighbourhood of the point $s = \infty$ except at the points of the cuts:

$$\mathcal{C}_{12} = \{k; u = (k_1 + k_2)^2 = M_{12}^2 + \rho; \rho \geq 0\}$$

$$\mathcal{C}_{14} = \{k; s = (k_1 + k_4)^2 = M_{14}^2 + \rho'; \rho' \geq 0\}$$

(see Fig. 9b).

Let us add that all these points of analyticity are points where $H_4(k)$ is analytic with respect to all the variables; this results from the following fact: if D is a domain and $\mathcal{V}$ a complex sub-manifold of $\mathbb{C}^n$ then the envelope

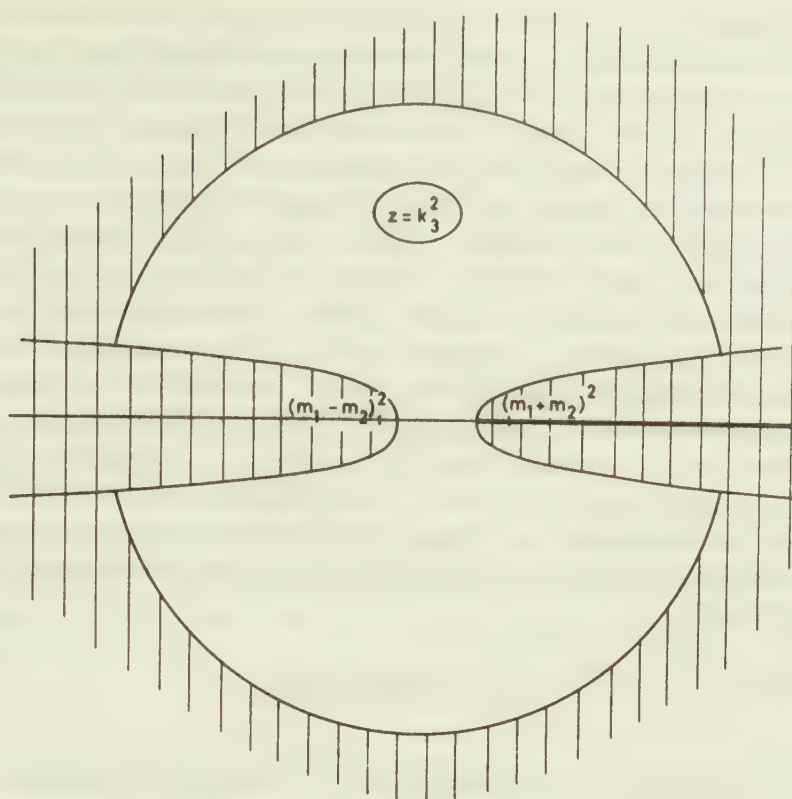


Fig. 10

The cut neighbourhood of the physical regions and the crossing domains
in the case of the three-point function
(for $k_1^2 = m_1^2$ and $k_2^2 = m_2^2$).

of holomorphy of $D \cap \mathcal{V}$ (in $\mathcal{V}$) is contained in the envelope of holomorphy of D .

As far as the three-point function is concerned, analogous results can be obtained by applying the same method (the situation is in fact much simpler than in the case $n = 4$); for $k_1^2 = m_1^2$ and $k_2^2 = m_2^2$, one obtains analyticity in the variable $z = k_3^2$ ($k_3 = -(k_1 + k_2)$) in the following regions (see Fig. 10):

- (a) a neighbourhood of $\{z \text{ real}; z \leq (m_1 - m_2)^2\}$
- (b) a neighbourhood of $\{z \text{ real}; z \geq (m_1 + m_2)^2\}$
minus the cut $\mathcal{C}_3 = \{z = M_3^2 + \rho; \rho \geq 0\}$
- (c) a neighbourhood of the point $z = \infty$ minus the cut $\mathcal{C}_3$.

The latter property is the analogue of the crossing for the three-point function.

We have not yet investigated whether the local procedures which have been successful in the case of the three and four-point functions are powerful enough to get rid of the general case. In particular the following problem is open: for any given reaction involving an arbitrary number of particles, and for every point in the "physical region" of this reaction, can one prove that the scattering amplitude at this point is the limit of an analytic function on the mass shell? If this result could be obtained, one might be in a position to make use of unitarity in order to define (at least locally) new Riemann sheets where the n -point function would be meromorphic. One could also ask whether the crossing property could be stated in general.

As a conclusion, we would like to point out that the regions of analyticity of the 3, 4 or n -point function which have been obtained here are not characteristic of the strict Wightman formulation of the axiomatic field theory.

For instance, in the framework of the Araki theory, the supports in x -space of the retarded functions which have been described here ("sharp supports") have to be replaced by larger supports which are deduced from the sharp ones by certain translations. Then, by applying theorem 1 of part 2, one still obtains analyticity in the same tubes (but the n -point function has a different behaviour at infinity in these tubes). Furthermore the spectral conditions remain unchanged, so that the primitive domain of analyticity is exactly the one which we have described. Now all the processes of analytic completion which have been used here are purely geometric, i. e. independent of the behaviour of the n -point function at infinity. Therefore, we obtain the same points of analyticity as before. The question of the rate of increase of the four-point function when one tends to infinity inside the crossing domain on the mass shell is still open; it should be polynomial at least in the Wightman approach.

REFERENCES

- [1] LEHMANN, H., SYMANZIK, K. and ZIMMERMANN, W., *Nuovo Cim.* 1 (1954) 205; *Ibid.* 6 (1957); 319;
GLASER, V., LEHMANN, H. and ZIMMERMANN, W., *Nuovo Cim.* 6 (1957) 1122.
- [2] BOGOLUBOV, N. N. and SHIRKOV, D. V., *Introduction to the Theory of Quantized Fields* (New York, 1959).
- [3] STEINMANN, O., *Helv. phys. Acta* 33 (1960) 257, 347.
- [4] RUEELLE, D., *Nuovo Cim.* 19 (1961) 356.
- [5] ARAKI, H., *J. Math. Phys.* 2 (1961) 163; *Suppl. Progr. theor. Phys.* 18 (1961);
ARAKI, H. and BURGOYNE, D., *Nuovo Cim.* 18 (1960) 342.
- [6] BROS, J., EPSTEIN, H. and GLASER, V., *Nuovo Cim.* 31 (1964) 1265.
- [7] BROS, J., EPSTEIN, H., and GLASER, V., A proof of the crossing property for two-particle amplitudes in general quantum field theory - Preprint, to be published in *Communications in Mathematical Physics*.
- [8] WIGHTMAN, A. S., Recent achievements in axiomatic field theory, *Theoretical Physics*, IAEA, Vienna (1963) and references therein.
- [9] HEPP, K., On the connection between the L. S. Z. and Wightman Quantum Field Theory, I.A.S., Princeton (1964).
- [10] ARAKI, H., *Einfuehrung in die Axiomatische Quantenfeld-theorie*, E. T. H. Lecture Notes, Zürich (1962).
- [11] STREATER, R. F. and WIGHTMAN, A. S., *P. C. T., Spin and Statistics and All That*.
- [12] EPSTEIN, H., *Lecture in Varenna Summer School* (1963).
- [13] EPSTEIN, H., *Math. Phys.* 1 (1960) 524.
- [14] WIGHTMAN, A. S., *Les Houches Summer School* (1960).
- [15] MALGRANGE, B., *Course on functions of several complex variables* - Tata Institute, Bombay.
- [16] MANDELSTAM, S., *Phys. Rev.* 112 (1958) 1344.
- [17] STREATER, R. F., *J. Math. Phys.* 3 (1962) 256.
- [18] KÄLLEN, G. and WIGHTMAN, A. S., *Kgl. Danske Vid. Selsk. Mat. Fys. Skr.* 1 No. 6 (1958).

APPENDICE C

I - Nous nous proposons d'abord de démontrer un résultat dont le contenu se trouve dans la remarque qui suit le théorème 4 du deuxième article. Ce théorème a trait aux domaines "analytiquement troués".

Définition : Nous dirons qu'un domaine D dans l'espace $\mathbb{C}^n$ des variables $z_1, \dots, z_n$ est "analytiquement troué" par l'ensemble analytique $\mathcal{M} = \{(z_1, \dots, z_n) ; z_1 = 0\}$ si D est de la forme $D = \Delta - \mathcal{M}$, où Δ désigne l'intérieur de la fermeture $\overline{D}$ de D .

Δ est le plus grand domaine contenant D tel que $D = \Delta - \mathcal{M}$; il possède la propriété suivante : si M est un point de la frontière de Δ tel que $z_1 = 0$, alors dans tout voisinage de M , il existe des points de la frontière de Δ tels que $z_1 \neq 0$.

Théorème C.1 - Si un domaine analytiquement troué $D = \Delta - \mathcal{M}$ est un domaine d'holomorphie, alors Δ est lui-même un domaine d'holomorphie.

L'application de ce théorème à la remarque qui suit le théorème 4 est contenue dans le corollaire suivant :

Corollaire : Si $D = \Delta - \mathcal{M}$ est analytiquement troué, l'enveloppe d'holomorphie de D est $\mathcal{H}(D) = \mathcal{H}(\Delta) - \mathcal{M}$.

Démonstration : $\mathcal{H}(D)$ est un domaine analytiquement troué de la forme $\Delta' - \mathcal{M}$, où d'après le théorème C-1, Δ' est d'holomorphie ; donc $\Delta' \supset \mathcal{H}(\Delta)$ et $\mathcal{H}(D) = \Delta' - \mathcal{M} \supset \mathcal{H}(\Delta) - \mathcal{M}$. Comme $\mathcal{H}(\Delta) - \mathcal{M}$ est un domaine d'holomorphie qui contient D , on a aussi $\mathcal{H}(\Delta) - \mathcal{M} \supset \mathcal{H}(D)$, d'où $\mathcal{H}(D) = \mathcal{H}(\Delta) - \mathcal{M}$.

Démonstration du théorème C.1 : Les points frontières de D pour lesquels $z_1 \neq 0$ sont les mêmes que ceux de Δ ; comme D est d'holomorphie, la condition locale de pseudoconvexité de la frontière est acquise en tous ces points. Pour montrer que Δ est d'holomorphie, il reste à prouver la pseudoconvexité de Δ en tous ses points

frontières pour lesquels $z_1 = 0$ (d'après la propriété suivant laquelle un domaine est d'holomorphic si en tous les points de sa frontière, il est localement un domaine d'holomorphic).

Soit M un point de la frontière de Δ pour lequel $z_1 = 0$. Démontrons d'abord que la restriction de Δ à $\{z_1 = 0\}$ est localement d'holomorphic au point M . Supposons qu'il n'en soit pas ainsi ; il existerait alors au moins un domaine K relativement compact dans $\Delta \cap \{z_1 = 0\}$ dont l'enveloppe d'holomorphic $\mathcal{H}(K)$ contiendrait un voisinage $W(M)$ de M dans $\{z_1 = 0\}$. Soit alors un nombre $\varepsilon > 0$ tel que le domaine $K' = \{z ; |z_1| < \varepsilon, (z_2, \dots, z_n) \in K\}$ soit contenu dans Δ . Pour tout $a \neq 0$, $|a| < \varepsilon$, l'enveloppe d'holomorphic de $K_a = \{z ; z_1 = a, (z_2, \dots, z_n) \in K\}$ contient l'ensemble $W_a(M) = \{z ; z_1 = a, (z_2, \dots, z_n) \in W(M)\}$. Par suite l'enveloppe d'holomorphic de $K' - \{z_1 = 0\}$ contient le voisinage troué $V(M) = \{z ; |z_1| < \varepsilon, z_1 \neq 0 ; (z_2, \dots, z_n) \in W(M)\}$. Comme $K' - \{z_1 = 0\}$ est contenu dans D qui est d'holomorphic, $V(M)$ est aussi contenu dans D . Mais ceci exclut l'existence de points frontières de Δ arbitrairement voisins de M et tels que $z_1 \neq 0$, ce qui est impossible par définition de Δ . Ainsi la restriction de Δ à $\{z_1 = 0\}$ est pseudoconvexe au point M .

Il nous faut maintenant montrer la pseudoconvexité de Δ au point M dans les directions transversales à la variété $\{z_1 = 0\}$. Si cette pseudoconvexité n'était pas réalisée, nous pourrions utiliser le théorème du disque sous la forme suivante. Il existe une famille d'ensembles analytiques à une dimension définis par des équations $F_i(z_1, z_2, \dots, z_n) = \zeta_i$, $2 \leq i \leq n$, tels que :

a) la variété $\{F_i = 0 \quad 2 \leq i \leq n\}$ passe par le point M et dans un voisinage de M le changement de variables $\zeta_1 = z_1$, $\zeta_i = F_i(z_1, z_2, \dots, z_n)$; $2 \leq i \leq n$ est biholomorphic.

b) Il existe deux nombres positifs r et R et un voisinage V d'holomorphic de $(\zeta_i = 0, 2 \leq i \leq n)$ tels que l'ensemble $A = \{(z_1, \dots, z_n) ; r < |z_1| < R ; (\zeta_i = F_i(z_1, z_2, \dots, z_n)) \in V\}$ appartienne à Δ .

c) Il existe un sous-domaine X de V ayant l'origine sur sa frontière et tel que l'ensemble $B = \{(z_1, \dots, z_n) ; |z_1| < R ; (\zeta_i = F_i(z_1, z_2, \dots, z_n)) \in X\}$ appartienne à Δ .

Nous allons alors montrer que le sous-domaine $A \cup B - \{z_1 = 0\}$ de D n'est pas un domaine d'holomorphic. On considère pour cela l'image de ce domaine dans

les variables $\xi = \log \zeta_1 = \log z_1$; $\zeta_2, \dots, \zeta_n$; cette image est :

$$\left\{ \operatorname{Im} \xi < \log R ; (\zeta_2, \dots, \zeta_n) \in X \right\} \cup \left\{ \log r < \operatorname{Im} \xi < \log R ; (\zeta_2, \dots, \zeta_n) \in V \right\} .$$

C'est un semi-tube dont l'enveloppe d'holomorphie est $\{ \operatorname{Im} \xi < \log R ; (\zeta_2, \dots, \zeta_n) \in V \}$; en effet la plus grande minorante plurisousharmonique de la fonction de $(\zeta_2 - \zeta_n)$ égale à $-\infty$ dans X et à $\log r$ dans $V - X$ est la fonction égale à $-\infty$ dans V .

En repassant aux variables initiales, on voit que l'enveloppe d'holomorphie de $A \cup B - \{z_1 = 0\}$ est le domaine :

$$\left\{ (z_1, \dots, z_n) ; |z_1| < R ; z_1 \neq 0 ; (\zeta_i = F_i(z_1, z_2, \dots, z_n)) \in V \right\} ;$$

comme D est d'holomorphie, il doit contenir ce domaine qui est un voisinage de M , troué par $z_1 = 0$. Or là encore, ceci contredit le fait que la frontière de Δ contient des points $z_1 \neq 0$ arbitrairement voisins de M . Par suite Δ est nécessairement pseudoconvexe en tout point M de sa frontière et le théorème C.1 est donc établi.

II - Nous allons maintenant préciser certains points de la démonstration de la propriété de croisement donnée à la fin du deuxième article.

Le point important est d'évaluer la taille du domaine d'analyticité obtenu en appliquant le théorème de l'edge of the wedge au deux tubes coupés :

$$\left\{ \operatorname{Im} u_1 > 0, \operatorname{Im} v_1 > 0, \operatorname{Im} u_2 < 0, \operatorname{Im} v_2 < 0 \right\} = \mathcal{E}_{12}$$

$$\left\{ \operatorname{Im} u_1 < 0, \operatorname{Im} v_1 < 0, \operatorname{Im} u_2 > 0, \operatorname{Im} v_2 > 0 \right\} = \mathcal{E}_{12} \quad ,$$

$$\text{où : } \mathcal{E}_{12} = \left\{ (u_1, u_2, v_1, v_2) : (u_1 + u_2)(v_1 + v_2) = \mathcal{M}_{12}^2 + \rho ; \rho \geq 0 \right\} .$$

On étudiera ensuite la section de ce domaine par une variété

$$\mathcal{L}_\xi = \{ u_2 = \mu_2, v_2 = \mu_2, u_1 v_1 = \xi \} \text{ dans un voisinage de } v_1' = \frac{-1}{v_1} \rightarrow 0 .$$

Pour traiter correctement les tubes coupés, nous prenons comme nouvel ensemble de variables indépendantes : $u_1, u_2, v_2, z = (u_1 + u_2)(v_1 + v_2)$.

La région réelle R en laquelle nous voulons appliquer le théorème de l'edge of the wedge est de la forme :

$$u_2 = v_2 = \mu_2, \quad -a < \xi = u_1 v_1 < M_1^2, \quad v_1 > \frac{1}{\varepsilon},$$

cette dernière condition pouvant être remplacée par une condition du type $z > A$.

Dans les variables u_1, u_2, v_2, z on a un premier couple de "tuboïdes" (c'est-à-dire de tubes se déformant en fonction des parties réelles) :

$$\left\{ \operatorname{Im} u_1 > 0, \operatorname{Im} u_2 < 0, \operatorname{Im} v_2 < 0, \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Im} \left(\frac{z}{u_1 + u_2} - v_2 \right) > 0 \right\}$$

et

$$\left\{ \operatorname{Im} u_1 < 0, \operatorname{Im} u_2 > 0, \operatorname{Im} v_2 > 0, \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Im} \left(\frac{z}{u_1 + u_2} - v_2 \right) < 0 \right\}.$$

Lorsque $z \rightarrow +\infty$ dans la région réelle R considérée, les tuboïdes ci-dessus admettent une position limite, à savoir :

$$\left\{ \operatorname{Im} u_1 > 0, \operatorname{Im} u_2 < 0, \operatorname{Im} v_2 < 0, \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Im}(u_1 + u_2) < 0 \right\}$$

et

$$\left\{ \operatorname{Im} u_1 < 0, \operatorname{Im} u_2 > 0, \operatorname{Im} v_2 > 0, \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Im}(u_1 + u_2) > 0 \right\}.$$

Par suite on peut trouver deux tubes véritables qui minorent les tuboïdes précédents, lorsque les parties réelles sont choisies dans R et dont l'enveloppe convexe de l'union soit le demi-espace $\operatorname{Im} z > 0$. (Le raisonnement est analogue pour les tuboïdes obtenus en remplaçant la condition $\operatorname{Im} z > 0$ par $\operatorname{Im} z < 0$).

Appliquant maintenant le théorème de l'edge of the wedge (oblique) à ces deux tubes, nous allons écrire que l'on obtient un domaine d'analyticité dont la taille, dans les parties imaginaires, est proportionnelle à la distance de la partie réelle à la frontière de la région de coïncidence : cette frontière est ici l'union des deux ensembles $H_1 = \left\{ \xi = u_1 v_1 = u_1 \left(\frac{z}{u_1 + u_2} - v_2 \right) = M_1^2 \right\}$ et $H_2 = \left\{ u_2 v_2 = M_2^2 \right\}$. Comme on se restreint à une région où $u_2 = v_2 = \mu_2$, le deuxième ensemble H_2 n'interviendra pas. En se restreignant également à $\operatorname{Im} u_2 = \operatorname{Im} v_2 = 0$, le domaine que l'on obtient est de la forme : $(\operatorname{Im} z)^2 + (\operatorname{Im} u_1)^2 < \rho^2 d^2(\operatorname{Re} u_1, \operatorname{Re} z)$, où $d(\operatorname{Re} u_1, \operatorname{Re} z)$ est la distance du point $(\operatorname{Re} u_1, \operatorname{Re} z, \operatorname{Re} u_2 = \operatorname{Re} v_2 = \mu_2)$ à l'ensemble H_1 , et ρ un facteur imposé par la forme des tubes. Montrons d'abord que dans toute la région R , $d(\operatorname{Re} u_1, \operatorname{Re} z)$ peut être minorée par $k d_{u_1}(\operatorname{Re} u_1, \operatorname{Re} z)$ où k est un facteur constant

et d_{u_1} la distance à H_1 parallèlement à l'axe Ou_1 . Il suffit de vérifier que le gradient de la fonction

$$F(u_1, u_2, v_2, z) = u_1 z - u_1^2 v_2 - u_1 u_2 v_2 - M_1^2 (u_1 + u_2)$$

fait un angle φ avec l'axe Ou_1 qui est borné dans toute la région R .

$$\text{Or,} \quad \text{tg } \varphi = \frac{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial u_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial v_2} \right)^2 \right]^{1/2}}{\frac{\partial F}{\partial u_1}} = \frac{\left[u_1^2 + (u_1 v_2 + M_1^2)^2 + (u_1^2 + u_1 u_2)^2 \right]^{1/2}}{z - 2u_1 v_2 - u_2 v_2 - M_1^2}$$

Cette expression est bornée dans R puisque u_1, u_2, v_2 y sont bornés et que $z > A$ (A supposé suffisamment grand).

d_{u_1} est la distance prise parallèlement à Ou_1 du point $(\text{Re } u_1, \text{Re } z)$ à l'hyperbole, section de H_1 par $\{u_2 = v_2 = \mu_2\}$:

$$z = \frac{\mu_2 M_1^2}{u_1} + \mu_2^2 + M_1^2 + u_1 \mu_2.$$

d_{u_1} est à son tour minoré si on remplace cette hyperbole par celle d'équation

$$z = \frac{\mu_2 M_1^2}{u_1} + \mu_2^2 + M_1^2.$$

Nous avons donc finalement un domaine d'analyticité de la forme suivante :

$$(\text{Im } z)^2 + (\text{Im } u_1)^2 < \sigma^2 \left(\frac{\mu_2 M_1^2}{\text{Re } z - \mu_2^2 - M_1^2} - \text{Re } u_1 \right)^2 \quad (\text{C.1})$$

où σ est un nouveau facteur numérique.

Nous allons maintenant effectuer la section du domaine décrit par l'inégalité (C.1) par la variété $\mathcal{L}_\zeta$ d'équation $u_1 v_1 = -\frac{u_1}{v_1} = \zeta = \zeta + i\eta$ où nous prendrons comme variable $v_1' = x + iy$.

Dans $\mathcal{L}_\zeta$ la variable z est exprimée en fonction de v_1' par l'équation :

$$z = \zeta + \mu_2^2 - \zeta v_1' \mu_2 - \frac{\mu_2}{v_1'}.$$

$$\text{On a donc : } \left\{ \begin{array}{l} \text{Re } z = \xi + \frac{\mu_2^2}{x^2+y^2} - \mu_2(\xi x - \eta y) - \frac{\mu_2 x}{x^2+y^2} \\ \text{Im } z = \eta - \mu_2(\eta x + \xi y) + \frac{\mu_2 y}{x^2+y^2} \\ \text{Re } u_1 = -\xi x + \eta y \\ \text{Im } u_1 = -(\eta x + \xi y) \end{array} \right. \quad (\text{C.2})$$

En portant les expressions (C.2) dans l'inégalité (C.1) on obtient :

$$\left[\eta - (\eta x + \xi y) \mu_2 + \frac{\mu_2 y}{x^2+y^2} \right]^2 + (\eta x + \xi y)^2 < \sigma^2 \left[\frac{\mu_2^2 \mu_1^2 (x^2+y^2)}{(x^2+y^2) [\xi - \mu_1^2 - \mu_2(\xi x - \eta y)] - \mu_2 x} + (\xi x - \eta y) \right]^2 \quad (\text{C.3})$$

Dans le plan de $v'_1 = (x, y)$, la coupure $\mathcal{C}_{12}$ est représentée par une branche de cubique γ_ζ d'équation :

$$\text{Im } z = \eta - \mu_2(\eta x + \xi y) + \frac{\mu_2 y}{x^2+y^2} = 0 \quad .$$

D'après l'expression de $\text{Re } z$, la branche infinie de $\mathcal{C}_{12}$ a pour image l'arc de γ_ζ aboutissant à l'origine par valeurs négatives de x . Cet arc est tangent à Ox ; il est décrit au second ordre par l'équation :

$$y = -\frac{\eta}{\mu_2} x^2 \quad ; \quad x < 0 \quad . \quad (\text{C.4})$$

Voyons maintenant si l'inégalité (C.3) est satisfaite lorsque (x, y) appartient à cet arc de γ_ζ . S'il en est ainsi cela prouvera qu'au voisinage de 0, γ_ζ est entouré d'un voisinage coupé de points d'analyticité.

Pour (x, y) dans γ_ζ et $|x|$ assez petit, l'inégalité (C.3) s'écrit en utilisant (C.4) :

$$|\eta x| \left(1 - \frac{x}{\mu_2}\right) < \sigma \left[\frac{\mu_2^2 \mu_1^2 x^2 \left(1 + \frac{\eta x^2}{2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{\eta x^2}{2}\right) [\xi - \mu_1^2 - \mu_2 x \left(\xi + \frac{\eta}{\mu_2} x\right)] - \mu_2 x} + x \left(\xi + \frac{\eta}{\mu_2} x\right) \right] \quad .$$

Pour $|x|$ assez petit, on peut se borner à considérer les parties principales des deux membres, ce qui donne :

$$|\eta x| < \sigma x (-\mathcal{M}_1^2 + \xi) \quad , \quad \text{avec } x < 0 \quad ,$$

$$\text{soit : } |\eta| < \sigma(\mathcal{M}_1^2 - \xi).$$

On peut donc trouver une région de la forme $-a < \xi < b$, $|\eta| < c$ et incluant le point physique ($\xi = \mu_1^2$, $\eta = 0$) telle que pour tout point ξ de cette région la cubique γ_ξ restreinte à un cercle $\{|x|^2 + |y|^2 < \varepsilon^2\}$ et à $\{x < 0\}$ soit entourée d'un voisinage coupé de points d'analyticité.

Tout ce qui précède s'appliquerait de même à un arc de cubique γ'_ξ représentant la section de la coupure $\mathcal{C}_{14}$ d'équation $(u_1 - u_2)(v_1 - v_2) = \mathcal{M}_{14}^2 + \rho$; $\rho \geq 0$. Cet arc est situé dans le demi-plan $\{x > 0\}$ et également tangent en 0 à Ox ; il est décrit au second ordre par l'équation :

$$y = \frac{\eta}{\mu_2} x^2 \quad ; \quad x > 0 \quad .$$

Nous remarquons que l'épaisseur des voisinages coupés d'analyticité obtenus décroît quadratiquement avec x lorsque $x \rightarrow 0$. En particulier on s'aperçoit que l'inégalité (C.3) n'est pas satisfaite sauf pour ξ réel, sur la droite $y = 0$.

Nous avons ainsi montré que l'hypothèse cruciale du lemme A-5 (existence d'un domaine décrit par b) dans l'énoncé du lemme A-5) est satisfaite.

Vu et approuvé
Paris, le 10 juillet 1970
Le Doyen de la Faculté des Sciences
de Paris

GAUTHIER

Vu
et Permis d'Imprimer
Le Recteur de l'Académie
de Paris

MALLET

